Lista E

Carolina Carvalho Silva - 10705933

1. Cálculos

O objetivo é encontrar as distribuições temporais da posição e da velocidade do carrinho que se caracteriza pelo sistema massa mola amortecedor.

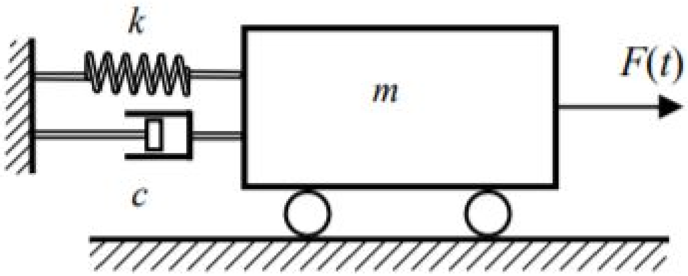

Imagem 1 - Sistema massa mola amortecedor

Neste exercício, pede-se a equação que rege o sistema, que será deduzida de duas formas : a partir do vetor de estados, encontrando os autovalores, e usando a transformada de Laplace, obtendo a função de transferência.

Os cálculos se encontram abaixo :

TMB:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F(t) \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}\cdot x - \frac{c}{m}\cdot\dot{x} + \frac{F(t)}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot F(t)$$

- Forma 1 (achando os autovalores):

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c}{m}\cdot\lambda + \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \Big| \quad \lambda = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\cdot\frac{k}{m}}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2-4mk}{m^2}}}{2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

- Forma 2 (achando a função de transferência):

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \Big| \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F(t)}{m}$$

$$sX_1 - x_1(0) = X_2$$
$$sX_2 - x_2(0) = -\frac{k}{m}X_1 - \frac{c}{m}X_2 + \frac{F}{m}$$

$$X_2\left(s + \frac{c}{m}\right) = x_2(0) - \frac{k}{m}X_1 + \frac{F}{m} \Rightarrow X_2 = \frac{m}{ms+c}\left(x_2(0) - \frac{k}{m}X_1 + \frac{F}{m}\right)$$

Substituindo X_2:

$$sX_1 - x_1(0) = \frac{m}{ms+c}\left(x_2(0) - \frac{kX_1}{m} + \frac{F}{m}\right)$$

$$X_1\left(s + \frac{k}{ms+c}\right) = x_1(0) + \frac{x_2(0) \cdot m}{ms+c} + \frac{F}{ms+c}$$

Como $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$:

$$X_1\left(\frac{ms^2+cs+k}{ms+c}\right) = \frac{F}{ms+c} \Rightarrow X_1 = \frac{F}{ms^2+cs+k}$$

Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{X_1}{F} = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$

$$ms^2 + cs + k = 0 \Rightarrow s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4mk}}{2m}$$

↳ Autovalores de A = raízes de s (denominador da função de transferência

↳ Se $c^2 - 4mk < 0 \Rightarrow c^2 < 4mk$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{4mk} < 1 \Rightarrow \frac{c}{2\sqrt{mk}} < 1$$, as raízes são complexas

↳ Frequência natural do sistema:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow ms^2 + cs + k = 0$$
$$\Rightarrow s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x(t) = A \cdot e^{st} = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t}$$

Substituindo $c_c = 2\sqrt{km}$, $\xi = \dfrac{c}{c_c}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A_1 \cdot e^{i\omega\sqrt{1-\xi^2}\, t} + A_2 \cdot e^{-i\omega\sqrt{1-\xi^2}\, t}\right)$$

Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

Frequência da parcela trigonométrica:

$$\omega\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2}{4km}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2 \cancel{k}}{4\cancel{k}m^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4mk - c^2}{4m^2}}$$

$$|s| = \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} + \frac{4mk - c^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{4\cancel{m}k}{4m^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$$

Frequência Natural

↳ Coeficiente de amortecimento:

$$\frac{\frac{c}{2m}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2m} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{c\sqrt{m}}{2m\sqrt{mk}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \xi$$

2. Simulação

Neste item, pede-se uma simulação que resulte na solução numérica do sistema diferencial. Assim, realiza-se uma simulação dos 10 segundos iniciais com alguns parâmetros fixos escolhidos arbitrariamente (*m = 1 kg* e *k = 5 N/m*) e 5 diferentes condições iniciais, além de diferentes valores para a variável b, resultando em três possíveis casos. Para cada condição inicial escolhida, atribuiu-se uma cor diferente, com as posições iniciais dadas em *m* e as velocidades iniciais em *m/s*.

- Vermelho
  - x(0)=1
  - dx(0)/dt=1
- Rosa
  - x(0)=2
  - dx(0)/dt=2
- Azul escuro
  - x(0)=3
  - dx(0)/dt=3
- Azul turquesa
  - x(0)=4
  - dx(0)/dt=4
- Verde
  - x(0)=5
  - dx(0)/dt=5

Os três possíveis casos se diferenciam pelas suas raízes : complexas, reais e coincidentes e reais e distintas.

a. Raízes complexas

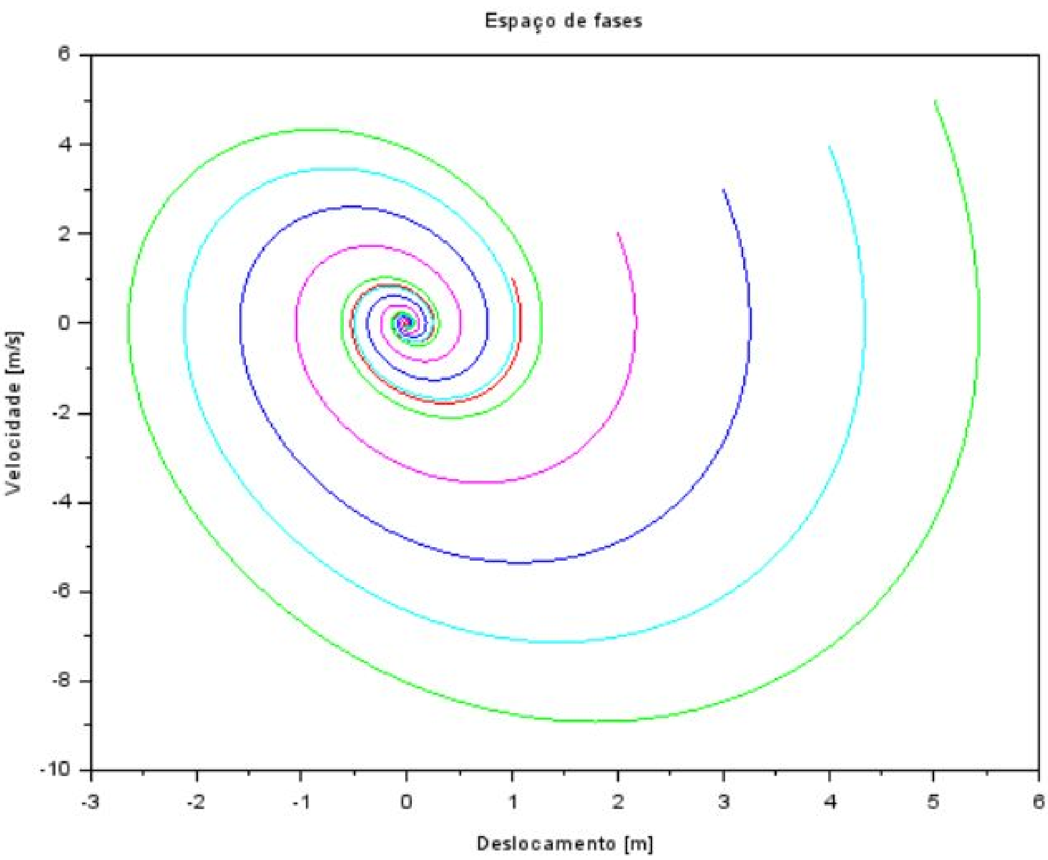

Imagem 2 - Espaço de fases quando as raízes são complexas

b. Raízes reais e coincidentes

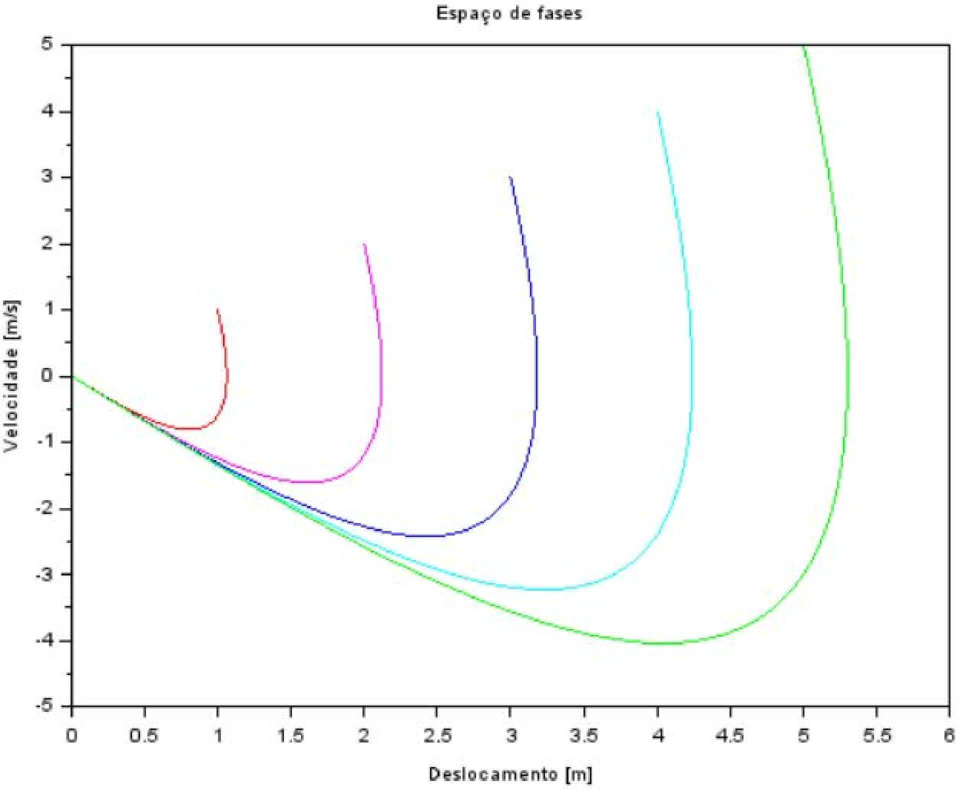

Imagem 3 - Espaço de fases quando as raízes são reais e coincidentes

c. Raízes reais e distintas

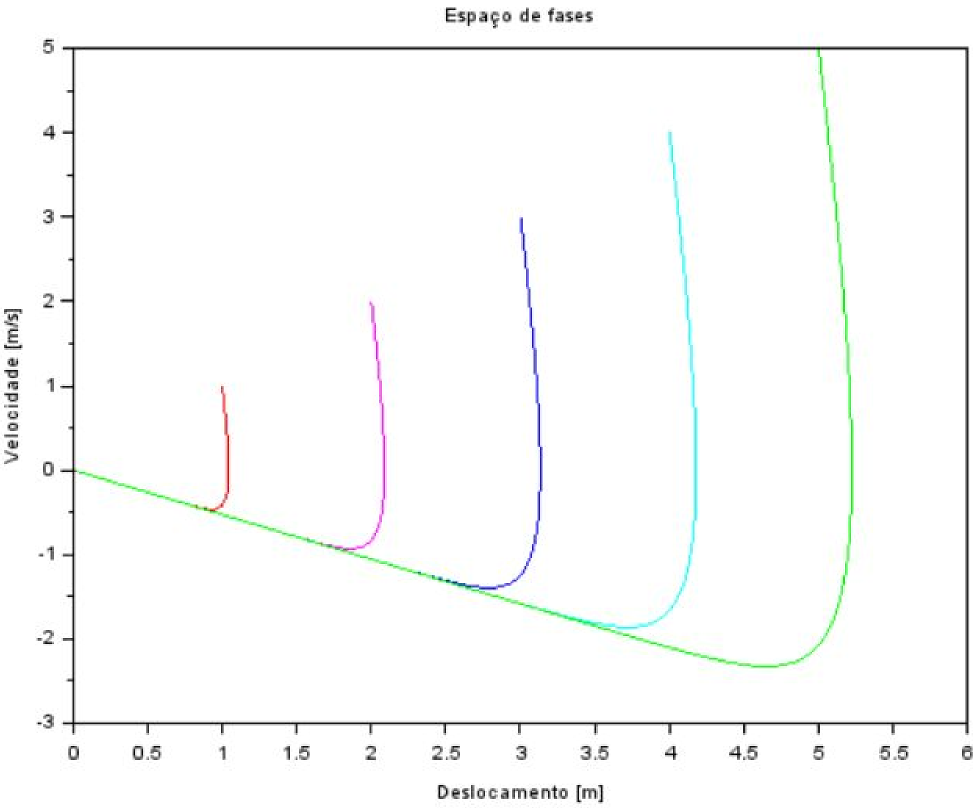

Imagem 4 - Espaço de fases quando as raízes são reais e distintas

3. Código

```
clear();
clc;
winsid(xdel());

//Tempo de simulação
t_final = 10;
dt = 1000;
t = linspace(0,t_final,dt);

//Constantes
m = 1; //Massa do carrinho
k = 5; //Constante elástica da mola

//Definindo o caso:
caso = messagebox(["Parâmetros iniciais:";"1. b = 1 (Raízes complexas)";"2. b = 5 (Raízes reais e coincidentes)";"3. b = 10 (Raízes reais e distintas)"],"Safety question","modal",["1","2","3"]);

select caso
case 1 then     //Caso 1: Raízes complexas
   b = 1;
case 2 then     //Caso 2: Raízes reais e coincidentes
   b = 5;
case 3 then     //Caso 3: Raízes reais e distintas
   b = 10;
end

//Condições iniciais
x0 = [1 2 3 4 5];
x_ponto0 = [1 2 3 4 5];

//Vetor de estados
funcprot(0)
 function dy=eq_dif(t, y)
 dy(1) = y(2);
 dy(2) = -(k/m)*y(1) - (b/m)*y(2);
 endfunction

for i = 1:length(x0)
 solucao = ode([x0(i);x_ponto0(i)],0,t,eq_dif);
 for j = 1:length(t)
   x(i,j) = solucao(1,j);
   x_ponto(i,j) = solucao(2,j);
 end
end

scf(1);
```

```
cor = ["r","m","b","c","g"];

T=list("Espaço de fases","Deslocamento [m]","Velocidade [m/s]");
xtitle(T(1),T(2),T(3));
for i = 1:length(x0)
 plot(x(i,:),x_ponto(i,:),cor(i));
end
```