

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3380 - Modelagem de Sistemas
Dinâmicos

LISTA E - MODELAGEM E ANÁLISE DE UM
SISTEMA DE SUSPENSÃO

Vitor Gregio Lourencini (8956387)

São Paulo
Outubro de 2020

1 Modelagem do Sistema

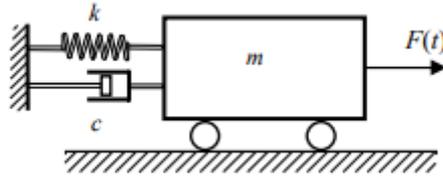


Figura 1: Modelo de um sistema massa-mola-amortecedor

Para a modelagem do sistema apresentado na figura 1 serão consideradas as seguintes hipóteses:

- Condições iniciais nulas ($x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$);
- Elementos puros e ideais;
- Sistema com 1 GDL (eixo horizontal).

Considerando $x(t)$ a posição do carrinho em função do tempo, aplica-se a segunda lei de Newton para o movimento horizontal:

$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow F(t) - f_k - f_c = m\ddot{x}(t) \quad (1)$$

$$F(t) - kx(t) - c\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t) \quad (2)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (3)$$

Escrevendo a equação na forma de Espaço de Estados, para a equação do modelo do sistema temos:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) \quad (4)$$

E para a saída do sistema temos:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} F(t) \quad (5)$$

O sistema foi simulado no *software Scilab* para 3 condições, para $\zeta < 1$, $\zeta = 1$ e $\zeta > 1$, cada uma foram consideradas entrada degrau unitário e senoidal com amplitude e frequência unitárias, o código utilizado consta no Apêndice I.

1.1 $\zeta < 1$

Para este caso foram utilizados os seguinte parâmetros:

- $m = 50 \text{ kg}$
- $c = 50 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$
- $k = 200 \text{ Nm}^{-1}$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 0.25 \quad (6)$$

$$\begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} & B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02 \end{bmatrix} \\ C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7)$$

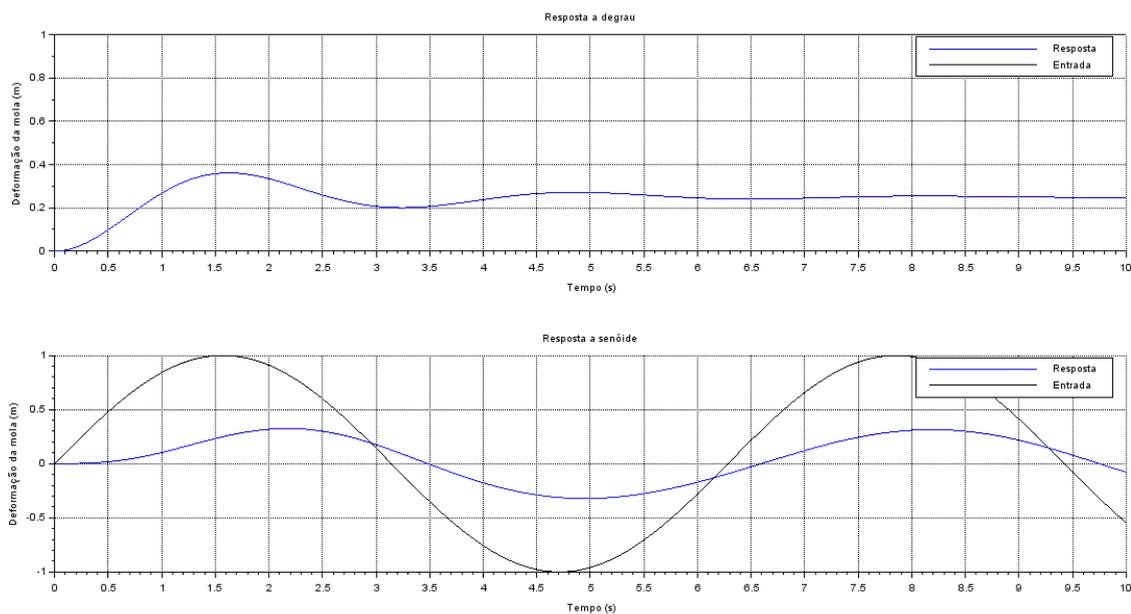


Figura 2: Resposta de um modelo de 2° grau com $\zeta < 1$

1.2 $\zeta = 1$

Para este caso foram utilizados os seguinte parâmetros:

- $m = 10 \text{ kg}$
- $c = 100 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$
- $k = 250 \text{ Nm}^{-1}$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 1 \quad (8)$$

$$\begin{cases} A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix} & B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\ C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9)$$

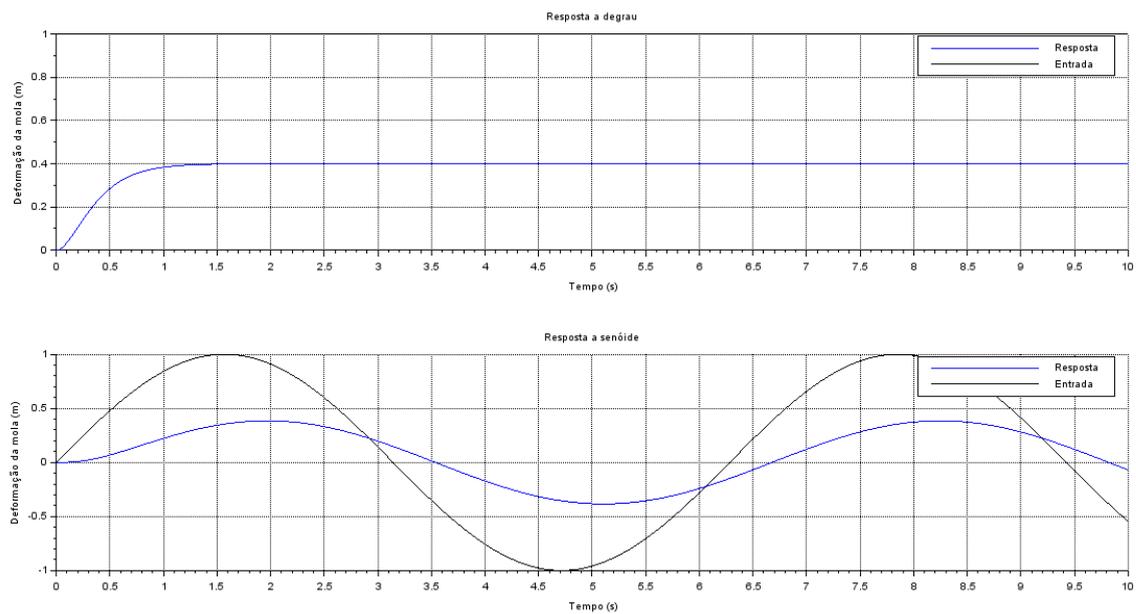


Figura 3: Resposta de um modelo de 2° grau com $\zeta = 1$

1.3 $\zeta > 1$

Para este caso foram utilizados os seguinte parâmetros:

- $m = 25 \text{ kg}$
- $c = 150 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$
- $k = 100 \text{ Nm}^{-1}$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 1.5 \quad (10)$$

$$\begin{cases} A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} & B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.04 \end{bmatrix} \\ C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D_3 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (11)$$

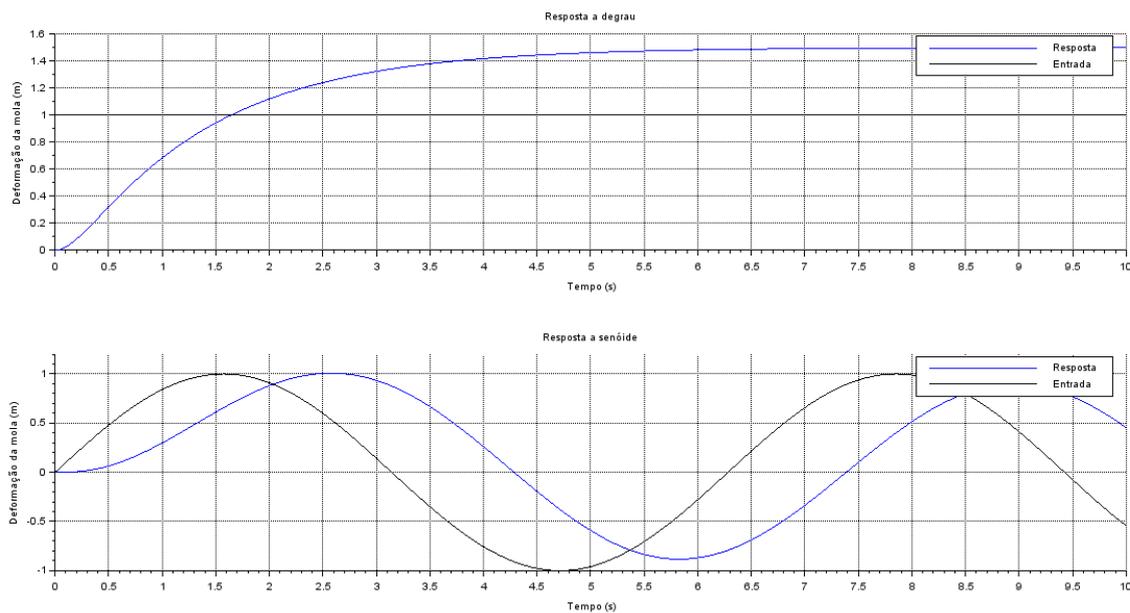


Figura 4: Resposta de um modelo de 2° grau com $\zeta > 1$

2 Exercício 1

A análise será feita exclusivamente para o primeiro caso, com $\zeta < 1$. Para este caso temos os seguintes parâmetros:

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \text{ rad/s} \\ \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 0.25 \\ \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{\sqrt{15}}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Substituindo os parâmetros na equação 3, temos:

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 4x(t) = 0.02F(t) \quad (13)$$

Aplicando a Transformada de Laplace, temos:

$$s^2X(s) + sX(s) + 4X(s) = 0.02F(s) \Rightarrow \frac{X}{F}(s) = \frac{0.02}{s^2 + s + 4} \quad (14)$$

Resolvendo a equação característica de segundo grau $s^2 + s + 4 = 0$ verificamos que $s = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$ e $s = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$ são soluções e pólos da função transferência 14.

$$p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \quad p_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$$

E calculando diretamente no *SciLab*, verificamos que são os autovalores da matriz de estado $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$.

$$|p_{1,2}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = 2 = \omega_n \quad (15)$$

$$\frac{|\text{real}(p_{1,2})|}{|p_{1,2}|} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = \zeta \quad (16)$$

$$|\text{imag}(p_{1,2})| = \frac{\sqrt{15}}{2} = \omega_d \quad (17)$$

3 Exercício 2

Da equação 3, para uma entrada $F(t)$ nula, temos:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (18)$$

Os casos a serem analisados são os mesmos no estudo do modelo, com $\zeta < 1$, $\zeta = 1$ e $\zeta > 1$, que possuem pares de pólos complexos, pólos reais e iguais, pólos reais e diferentes, respectivamente, em 3 condições iniciais diferentes:

$$\text{Caso A} = \begin{cases} x_0 = 0m \\ \dot{x}_0 = 5m/s \end{cases} \quad \text{Caso B} = \begin{cases} x_0 = 2m \\ \dot{x}_0 = 0m/s \end{cases} \quad \text{Caso C} = \begin{cases} x_0 = -2m \\ \dot{x}_0 = -2m/s \end{cases}$$

O código feito para gerar os gráficos referentes a estas condições foram feitos no *Scilab* e constam no apêndice 2.

3.1 $\zeta < 1$

Para este caso foram utilizados os seguinte parâmetros:

- $m = 50 \text{ kg}$
- $c = 50 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$
- $k = 200 \text{ Nm}^{-1}$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 0.25 \quad (19)$$

As matrizes do espaço de estados se mantem as mesmas, porém a saída será a posição e a velocidade, possuindo as seguinte matrizes:

$$\begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} & B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02 \end{bmatrix} \\ C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (20)$$

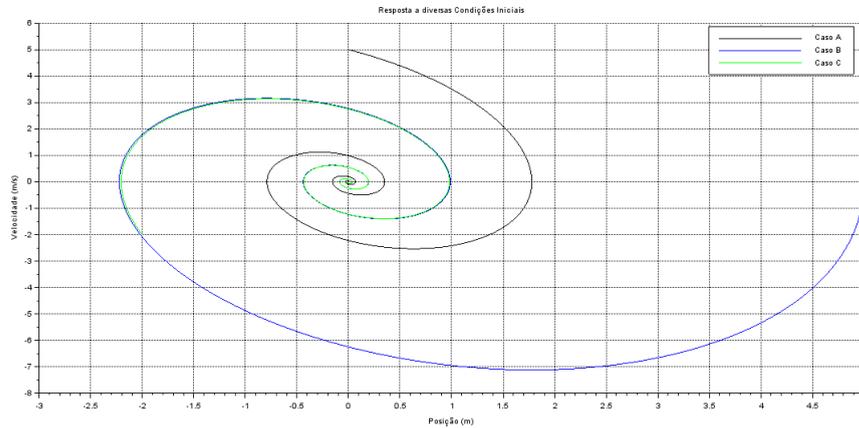


Figura 5: Diagrama de fase para o modelo dinâmico com $\zeta < 1$ e diferentes condições iniciais

3.2 $\zeta = 1$

Para este caso foram utilizados os seguinte parâmetros:

- $m = 10 \text{ kg}$
- $c = 100 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$
- $k = 250 \text{ Nm}^{-1}$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 1 \quad (21)$$

As matrizes do espado de esados se mantem as mesmas, porém a saída será a posição e a velocidade, possuindo as seguinte matrizes:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix} \\ C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\ D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (22)$$

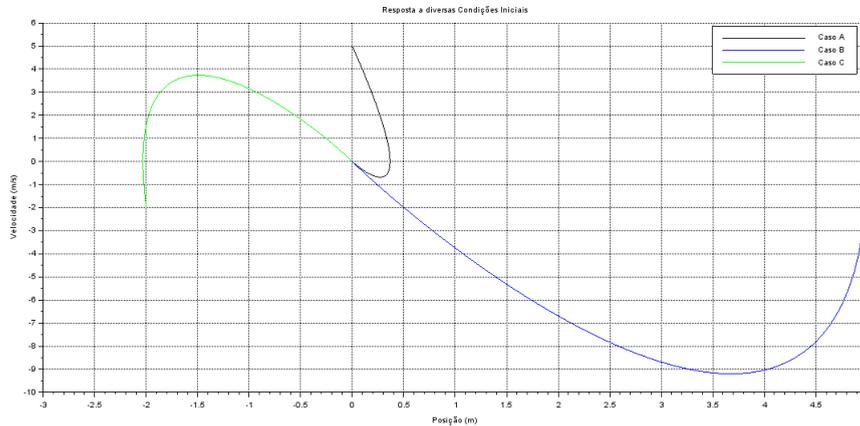


Figura 6: Diagrama de fase para o modelo dinâmico com $\zeta = 1$ e diferentes condições iniciais

3.3 $\zeta > 1$

Para este caso foram utilizados os seguinte parâmetros:

- $m = 25 \text{ kg}$
- $c = 150 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$
- $k = 100 \text{ Nm}^{-1}$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 1.5 \quad (23)$$

As matrizes do espado de esados se mantem as mesmas, porém a saída será a posição e a velocidade, possuindo as seguinte matrizes:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \\ C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.04 \end{bmatrix} \\ D_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (24)$$

Nota-se que para os 3 casos as curvas convergem para $(x, v) = (0, 0)$ que é a condição de equilíbrio estático do sistema com entrada nula, para o caso com $\zeta < 1$ a curva descreve um movimento oscilatório que afunila com o tempo, enquanto para $\zeta = 1$ e $\zeta > 1$ as curvas atingem a origem assintoticamente.

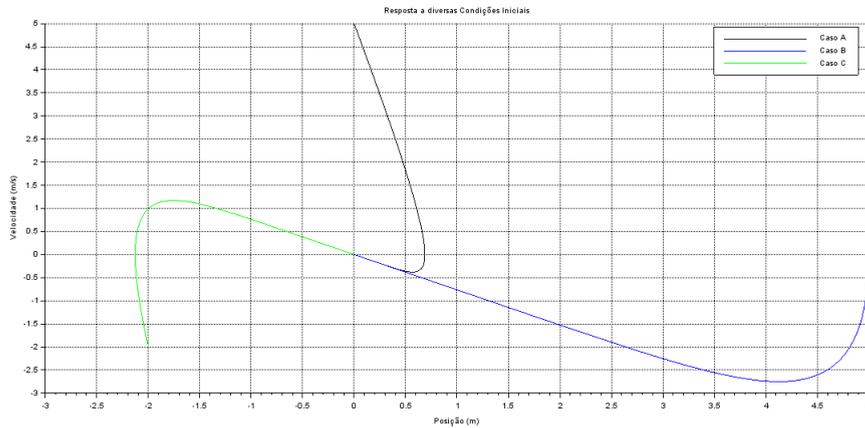


Figura 7: Diagrama de fase para o modelo dinâmico com $\zeta > 1$ e diferentes condições iniciais

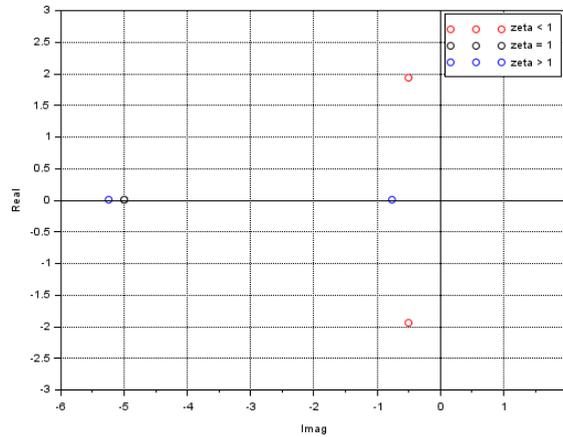


Figura 8: Posição dos pólos dos modelos no plano s

A figura 8 mostra a comparação entre os pólos dos 3 modelos estudados no plano s, nota-se que o eixo complexo representa o movimento oscilatório, no qual a distância até a origem representa a frequência natural do sistema, enquanto a componente imaginária representa a frequência amortecida, enquanto a parte real representa o decaimento exponencial do parâmetro de estudo.

4 Apêndice I

```
1
2 // Definindo os parametros dos sistemas:
3 m1 = 50; m2 = 10; m3 = 25;
4 c1 = 50; c2 = 100; c3 = 150;
5 k1 = 200; k2 = 250; k3 = 100;
6
7 // Matrizes dos sistemas:
8 A1 = [0 1;-k1/m1 -c1/m1]; A2 = [0 1;-k2/m2 -c2/m2]; A3 = [0 ...
    1;-k3/m3 -c3/m3];
9 B1 = [0;c1/m1]; B2 = [0;c2/m2]; B3 = [0;c3/m3];
10 C = [1 0];
11 D = [0];
12
13 // Montando os sistemas:
14 sys1 = syslin('c',A1,B1,C,D);
15 sys2 = syslin('c',A2,B2,C,D);
16 sys3 = syslin('c',A3,B3,C,D);
17
18 // Definindo o vetor tempo:
19 t = 0:0.01:10;
20
21 // Definindo as entradas:
22 step = ones(t);
23 sine = sin(t);
24
25 // No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
26 x0e = [0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
27
28 // Alem de calcular a saida y, a funcao csim tambem permite ...
    obter o estado x:
29 [y1_step,x1_step] = csim(step,t,sys1,x0e);
30 [y1_sine,x1_sine] = csim(sine,t,sys1,x0e);
31
32 [y2_step,x2_step] = csim(step,t,sys2,x0e);
33 [y2_sine,x2_sine] = csim(sine,t,sys2,x0e);
34
35 [y3_step,x3_step] = csim(step,t,sys3,x0e);
36 [y3_sine,x3_sine] = csim(sine,t,sys3,x0e);
37
38 // Abrindo uma nova janela de graficos:
39 xset('window',1)
40
41 // Mostrando o resultado da simulacao caso 1:
42 subplot(211)
43 plot2d(t,y1_step,2)
44 plot2d(t,step,1)
45 legend('Resposta','Entrada')
46 xtitle('Resposta a degrau','Tempo (s)', 'Deflexao da mola (m)')
```

```

47 xgrid()
48
49 subplot(212)
50 plot2d(t,y1_sine,2)
51 plot2d(t,sine,1)
52 legend('Resposta','Entrada')
53 xtitle('Resposta a sen[U+FFFD]e', 'Tempo (s)', Defra[U+FFFD]+FFFD]da mola (m)')
54 xgrid()
55
56 // Abrindo uma nova janela de graficos:
57 xset('window',2)
58
59 // Mostrando o resultado da sin[U+FFFD]+FFFD] caso 1:
60 subplot(211)
61 plot2d(t,y2_step,2)
62 plot2d(t,step,1)
63 legend('Resposta','Entrada')
64 xtitle('Resposta a degrau', 'Tempo (s)', Defra[U+FFFD]+FFFD]da mola (m)')
65 xgrid()
66
67 subplot(212)
68 plot2d(t,y2_sine,2)
69 plot2d(t,sine,1)
70 legend('Resposta','Entrada')
71 xtitle('Resposta a sen[U+FFFD]e', 'Tempo (s)', Defra[U+FFFD]+FFFD]da mola (m)')
72 xgrid()
73
74 // Abrindo uma nova janela de graficos:
75 xset('window',3)
76
77 // Mostrando o resultado da sin[U+FFFD]+FFFD] caso 1:
78 subplot(211)
79 plot2d(t,y3_step,2)
80 plot2d(t,step,1)
81 legend('Resposta','Entrada')
82 xtitle('Resposta a degrau', 'Tempo (s)', Defra[U+FFFD]+FFFD]da mola (m)')
83 xgrid()
84
85 subplot(212)
86 plot2d(t,y3_sine,2)
87 plot2d(t,sine,1)
88 legend('Resposta','Entrada')
89 xtitle('Resposta a sen[U+FFFD]e', 'Tempo (s)', Defra[U+FFFD]+FFFD]da mola (m)')
90 xgrid()

```

5 Apêndice II

```
1 // Definindo os parametros dos sistemas:
2 m1 = 50; m2 = 10; m3 = 25;
3 c1 = 50; c2 = 100; c3 = 150;
4 k1 = 200; k2 = 250; k3 = 100;
5
6 // Matrizes dos sistemas:
7 A1 = [0 1;-k1/m1 -c1/m1]; A2 = [0 1;-k2/m2 -c2/m2]; A3 = [0 ...
      1;-k3/m3 -c3/m3];
8 B1 = [0;c1/m1]; B2 = [0;c2/m2]; B3 = [0;c3/m3];
9 C = [1 0;0 1];
10 D = [0;0];
11
12 // Montando os sistemas:
13 sys1 = syslin('c',A1,B1,C,D);
14 sys2 = syslin('c',A2,B2,C,D);
15 sys3 = syslin('c',A3,B3,C,D);
16
17 // Definindo o vetor tempo:
18 t = 0:0.01:10;
19
20 // Definindo as entradas:
21 F = zeros(t);
22
23 // No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
24 x0_A = [0;5]; // neste caso, x1(0) = 0 e x2(0) = 5
25 x0_B = [5;0]; // neste caso, x1(0) = 5 e x2(0) = 0
26 x0_C = [-2;-2]; // neste caso, x1(0) = -2 e x2(0) = -2
27
28 // Alem de calcular a saida y, a funcao csim tambem permite ...
    obter o estado x:
29 [y1A,x1A] = csim(F,t,sys1,x0_A);
30 [y1B,x1B] = csim(F,t,sys1,x0_B);
31 [y1C,x1C] = csim(F,t,sys1,x0_C);
32
33 [y2A,x2A] = csim(F,t,sys2,x0_A);
34 [y2B,x2B] = csim(F,t,sys2,x0_B);
35 [y2C,x2C] = csim(F,t,sys2,x0_C);
36
37 [y3A,x3A] = csim(F,t,sys3,x0_A);
38 [y3B,x3B] = csim(F,t,sys3,x0_B);
39 [y3C,x3C] = csim(F,t,sys3,x0_C);
40
41 // Abrindo uma nova janela de graficos:
42 xset('window',1)
43
44 // Mostrando o resultado da simulacao caso 1:
45 plot2d(y1A(1,:),y1A(2,:),1)
46 plot2d(y1B(1,:),y1B(2,:),2)
```

```

47 plot2d(y1C(1,:),y1C(2,:),3)
48 legend('Caso A','Caso B','Caso C')
49 xtitle('Resposta a diversas @l[U+FFFFU+FFFD]Iniciais', B[U+FFFFU+FFED]..
(m)', 'Velocidade (m/s)')
50 xgrid()
51
52 // Abrindo uma nova janela de graficos:
53 xset('window',2)
54
55 // Mostrando o resultado da @l[U+FFFFU+FFFD]caso 1:
56 plot2d(y2A(1,:),y2A(2,:),1)
57 plot2d(y2B(1,:),y2B(2,:),2)
58 plot2d(y2C(1,:),y2C(2,:),3)
59 legend('Caso A','Caso B','Caso C')
60 xtitle('Resposta a diversas @l[U+FFFFU+FFFD]Iniciais', B[U+FFFFU+FFED]..
(m)', 'Velocidade (m/s)')
61 xgrid()
62
63 // Abrindo uma nova janela de graficos:
64 xset('window',3)
65
66 // Mostrando o resultado da @l[U+FFFFU+FFFD]caso 1:
67 plot2d(y3A(1,:),y3A(2,:),1)
68 plot2d(y3B(1,:),y3B(2,:),2)
69 plot2d(y3C(1,:),y3C(2,:),3)
70 legend('Caso A','Caso B','Caso C')
71 xtitle('Resposta a diversas @l[U+FFFFU+FFFD]Iniciais', B[U+FFFFU+FFED]..
(m)', 'Velocidade (m/s)')
72 xgrid()

```