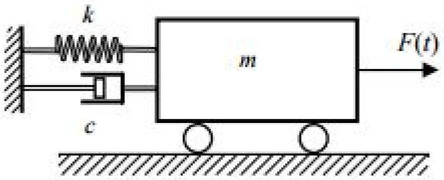
**PME3380 - MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS PEDRO MORETTO DI PIETRO – 9853123 LISTA 5**

**Exercício:**

Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada F(t) do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação x(t) da mola como saída:




*(extraído das instruções para o exercício)*

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Adotando as variáveis de estado:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$$

Substituindo:

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -\tfrac{k}{m}x_1 - \tfrac{c}{m}x_2 + \tfrac{1}{m}u$$

Representando na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u$$

Para a saída:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Partindo das equações de estado, aplicando a Transformada de Laplace:

$$sX_1 - x_1(0) = X_2$$

$$sX_2 - x_2(0) = -\tfrac{k}{m}X_1 - \tfrac{c}{m}X_2 + \tfrac{1}{m}U$$

Para condições iniciais nulas:

$$x_1(0) = 0 \; e \; x_2(0) = 0$$

$$sX_1 = X_2$$

$$sX_2 = -\tfrac{k}{m}X_1 - \tfrac{c}{m}X_2 + \tfrac{1}{m}U$$

Resolvendo o sistema:

$$s^2X_1 =- \frac{k}{m}X_1 - \frac{c}{m}(sX_1) + \frac{1}{m}U$$

$$X_1(s^2 + \frac{c}{m} + \frac{k}{m}) = \frac{1}{m}U$$

$$X_1(ms^2 + c + k) = U$$

Como $Y = X_1$

$$Y(ms^2 + c + k) = U$$

Sendo a função de transferência $G(s) = \frac{U}{Y}$ , temos:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$

Desta maneira, foi feito um código em Scilab para a simulação de três casos distintos, de acordo com o valor de $\zeta$ :

- Caso 1:

$$\zeta = \frac{c}{2*\sqrt{km}} < 1$$

- Caso 2:

$$\zeta = \frac{c}{2*\sqrt{km}} = 1$$

- Caso 3:

$$\zeta = \frac{c}{2*\sqrt{km}} > 1$$

```
// Caso 1, Zeta=c/(2*(k*m)^(0.5))<1:
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;c=10;k=900;
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e=[0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Caso 1 - Resposta à excitação degrau','Tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',2)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Caso 1 - Resposta à excitação degrau','Tempo t','Velocidade da massa')

// Caso 2, Zeta=c/(2*(k*m)^(0.5))=1:
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;c=60;k=900;
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
```

```
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e=[0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',3)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Caso 2 - Resposta à excitação degrau','Tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',4)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Caso 2 - Resposta à excitação degrau','Tempo t','Velocidade da massa')

// Caso 3, Zeta=c/(2*(k*m)^(0.5))>1:
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;c=90;k=900;
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e=[0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',5)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Caso 3 - Resposta à excitação degrau','Tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',6)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Caso 3 - Resposta à excitação degrau','Tempo t','Velocidade da massa')
```

Do exposto código acima, surgem os seguintes gráficos:

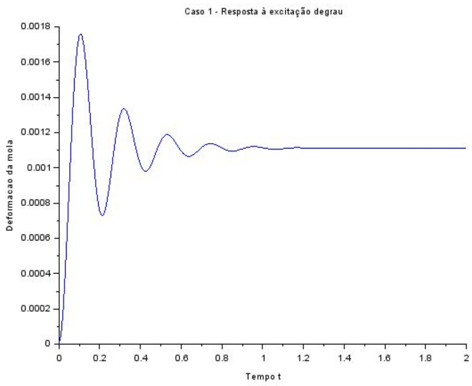



*Figura 1 - Gráfico da Deformação da Mola pelo Tempo - Caso 1*

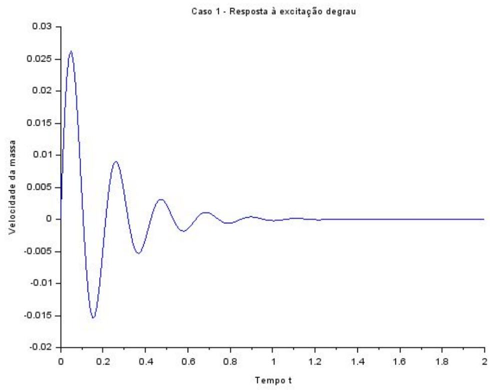



*Figura 2 - Gráfico da Velocidade da Massa pelo Tempo - Caso 1*

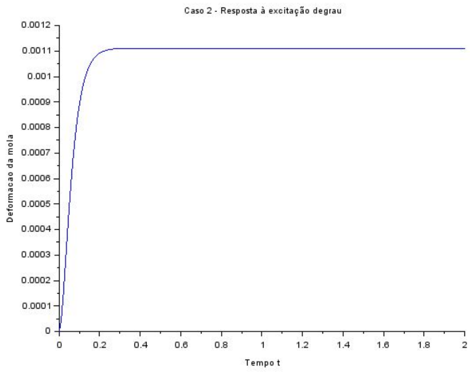



*Figura 3 - Gráfico da Deformação da Mola pelo Tempo - Caso 2*

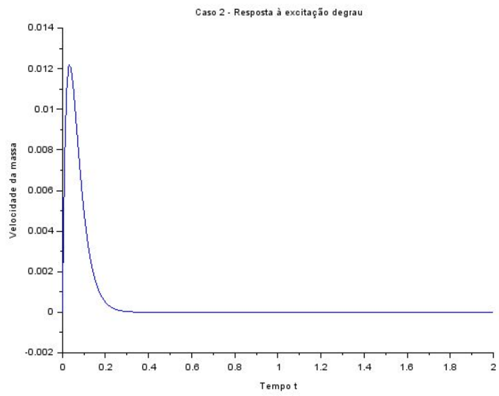



*Figura 4 - Gráfico da Velocidade da Massa pelo Tempo - Caso 2*

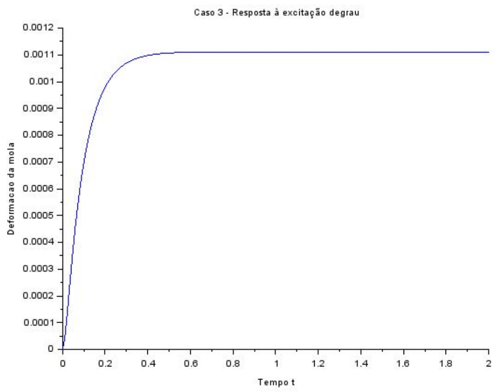



*Figura 5 - Gráfico da Deformação da Mola pelo Tempo - Caso 3*

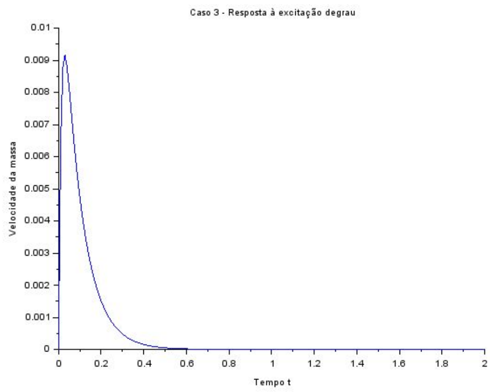



*Figura 6 - Gráfico da Velocidade da Massa pelo Tempo - Caso 3*

Também foram calculados os autovalores da matriz A:

$$det\ (A - \lambda I) = 0$$
$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Essa equação do segundo grau pode ser resolvida, dependendo do valores de $\Delta$:

$$\Delta = \frac{c^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{m^2}$$
$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2-4km}}{2m}$$

Para $\zeta = \frac{c}{2*\sqrt{km}} = 1$, temos

$$\lambda = -\frac{c}{2m}$$

Para $\zeta = \frac{c}{2*\sqrt{km}} < 1$, temos raízes imaginárias

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{-|c^2-4km|}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{|c^2-4km|}}{2m} * i$$

É possível observar que as raízes (e também os autovalores) são números complexos nesse último caso e as iguais às raízes do polinômio no denominador da função de transferência $s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0$.

O módulo desse número complexo é igual à frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor:

$\omega^2 = \left(-\frac{c}{2m}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|c^2-4km|}}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$.

Se dividirmos o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo, obtemos o coeficiente de amortecimento:

$$\zeta = \frac{\sqrt{\left(-\frac{c}{2m}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{|c^2-4km|}}{2m}\right)^2}} = \frac{c}{2*\sqrt{km}}$$

E a frequência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do pólo:

$$\omega_d = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{|c^2-4km|}}{2m}\right)^2} = \omega * \sqrt{1-\zeta^2}$$

**Segunda Tarefa:**

Foram elaboradas três figuras. Cada uma representa a evolução temporal de três condições iniciais, sendo essas evoluções em sistemas com fatores de amortecimento diferente. Os valores da massa e do amortecimento foram mantidos constantes, de 1kg e de 60kg/s
As condições iniciais foram as mesmas para todos os casos, sendo:

$$x_{0e1} = [0; 1]$$

$$x_{0e2} = [-1; 3]$$

$$x_{0e3} = [2; 0]$$

Sendo $x_{0e1}$ colorido em azul, $x_{0e2}$ em verde e $x_{oe3}$ em vermelho.

**Primeiro caso: Amortecimento subcrítico** $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

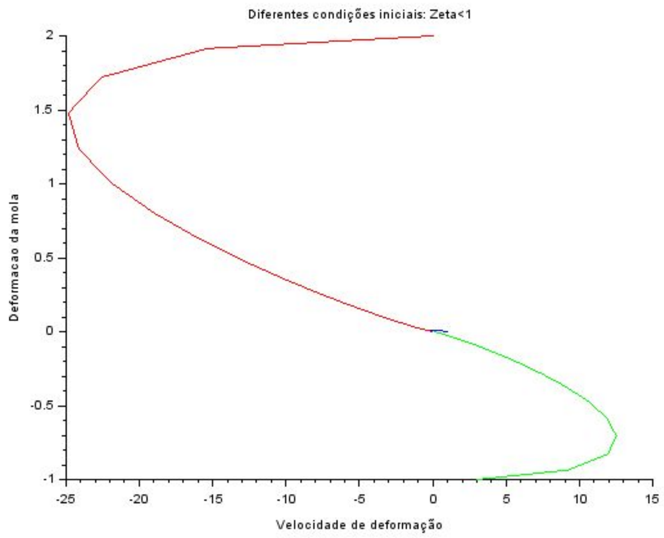



Figura: Representação do estado de fases para amortecimento subcrítico

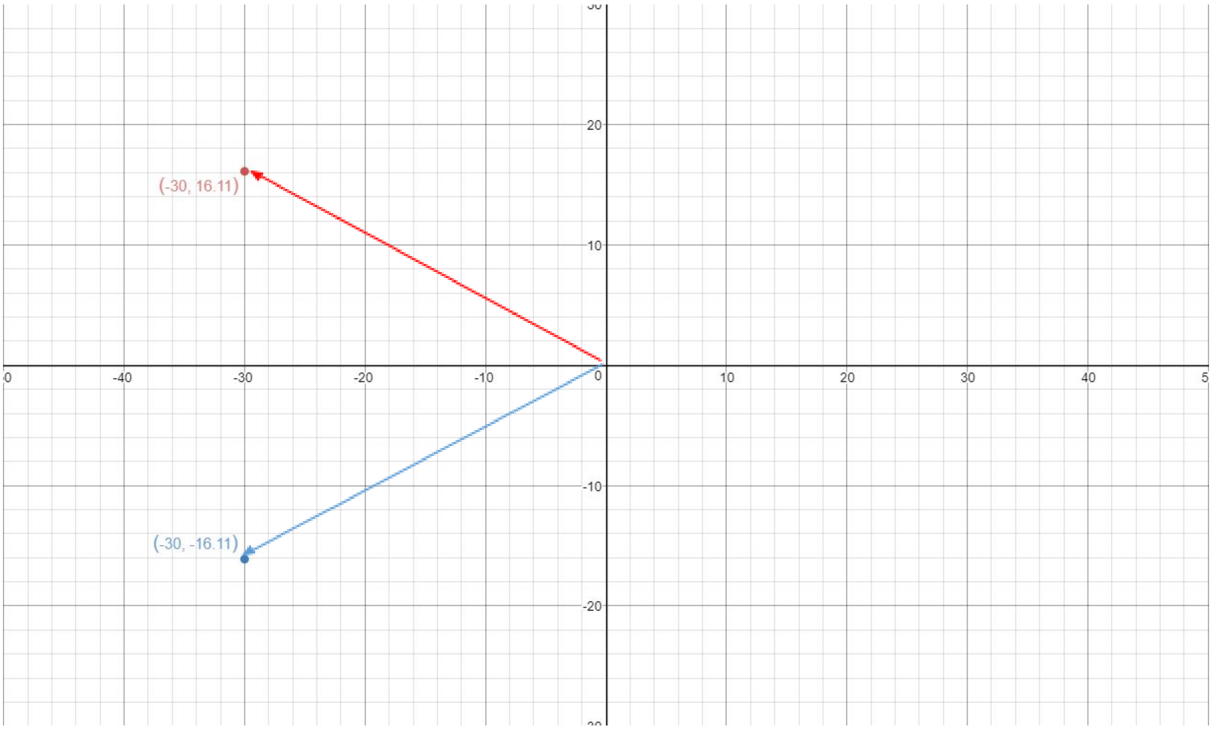



Figura: Polos do amortecimento subcrítico no plano complexo

**Segundo caso: Amortecimento crítico** $\zeta = 1$

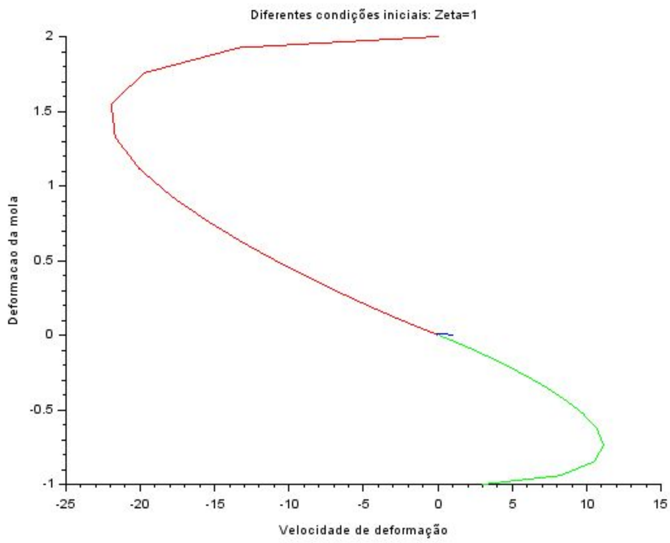



Figura: Representação do estado de fases para amortecimento subcrítico

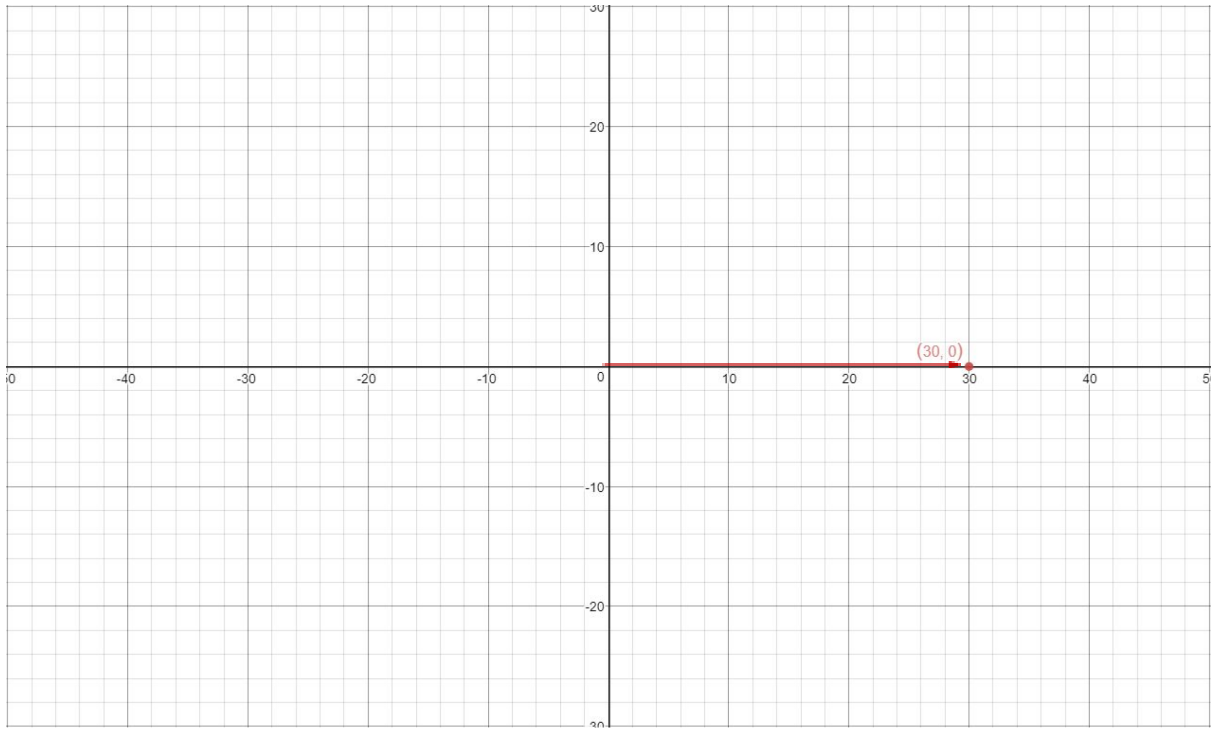



Figura: Polo duplo do caso crítico no plano complexo

**Terceiro caso: Amortecimento supercrítico** $\zeta = \sqrt{2} > 1$

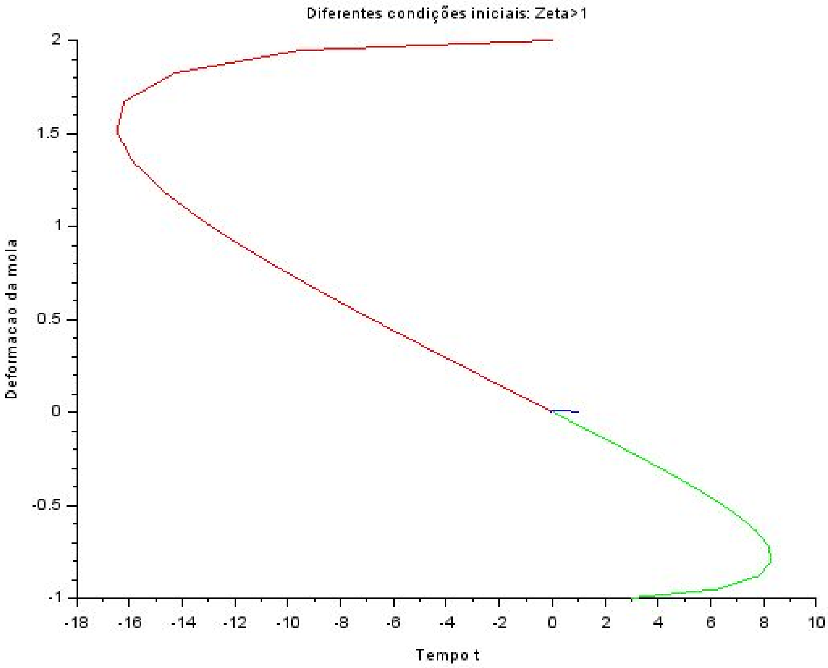



Figura: Espaço de fases para o caso supercrítico

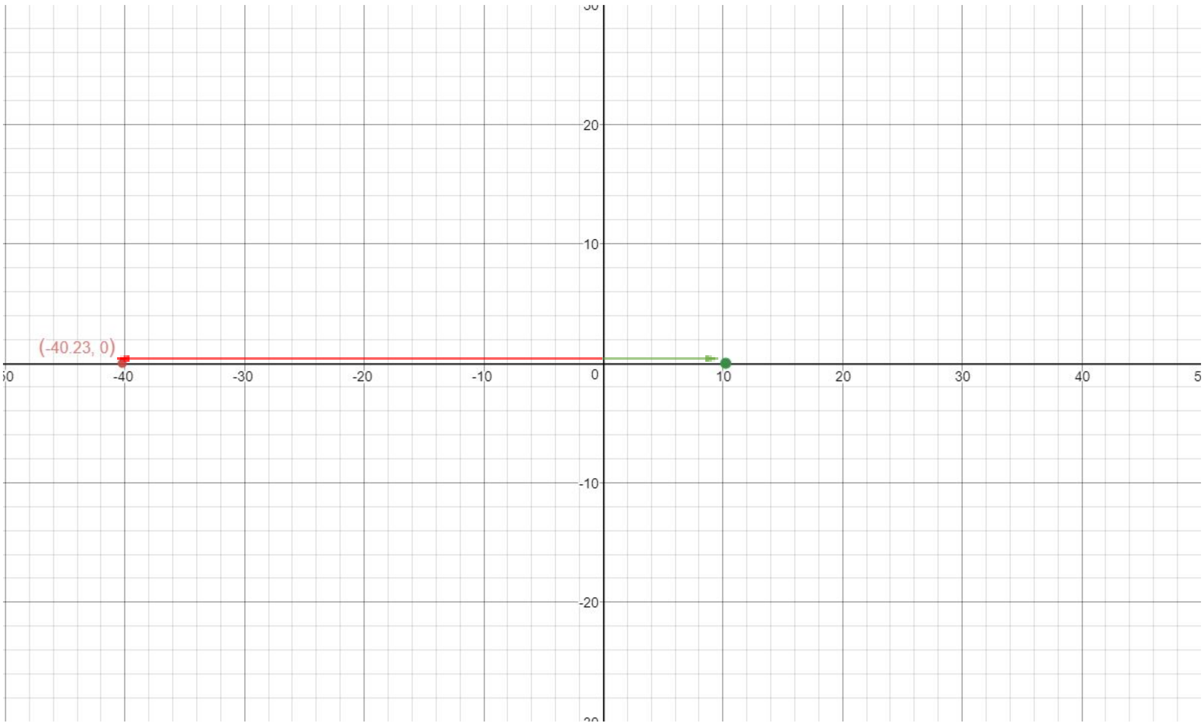



Figura: Representação dos pólos reais e distintos do caso supercrítico

Nota-se neste caso uma distorção do espaço de fases conforme o aumento do fator de amortecimento. Há uma correlação entre os pólos no plano complexo e o comportamento transiente do sistema: A parte imaginária determina a frequência natural do sistema em casos que $\zeta < 1$, bem como o módulo da parte real dividido pelo módulo do número complexo fornece o fator de amortecimento.

No caso em que $\zeta = 1$, o único polo fornece a frequência natural de oscilação.

Já no caso em que $\zeta > 1$, a distância entre os polos fornece duas vezes a frequência natural do sistema.