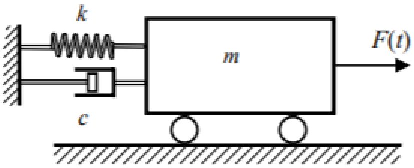
PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

LISTA E

Tiago Vieira de Campos Krause 9836238

Exercício:

Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada $F(t)$ do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação $x(t)$ da mola como saída:



Simule o sistema para diferentes valores de m, c e k, de tal forma que se tenha uma simulação para cada um dos três casos a seguir: $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$, $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = 1$, $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} > 1$

Equações de estado:

- Variáveis de estados:

$v(t)$: velocidade horizontal do bloco (variável relacionada com a energia cinética do bloco).

$x(t)$: deflexão da mola (variável relacionada com a eneria potencial elástica da mola).

- Entradas u:

$F(t)$: força de entrada do tipo degrau.

- Saída y:

$x(t)$: deflexão da mola.

- Parâmetros:

m : massa do bloco.

k : rigidez da mola (constante elástica).

c : constante do amortecimento.

- Obtenção das equações:

Pela cinemática $\dot{x}(t) = v(t)$

Pelo TMB: $m\dot{v}(t) = F(t) - kx(t) - cv(t) \rightarrow \dot{v}(t) = \frac{F(t) - kx(t) - cv(t)}{m}$

- Definição matricial:

Sendo $x_1 = x$, $x_2 = v$ e $u = F(t)$, as equações podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u$$

Tendo definido as entradas e saídas, obtém-se:

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] \cdot u$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$sX_1 - x_1(0) = X_2$$

$$sX_2 - x_2(0) = -\frac{k}{m}X_1 - \frac{c}{m}X_2 + \frac{1}{m}U$$

Como $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$, entao $sX_1 = X_2$ e:

$$X_1 = \frac{1}{(ms^2 + k + cs)}U = Y$$

Já que $Y = G(s)U$, então:

$$G(s) = \frac{1}{(ms^2 + k + cs)}$$

Utilizando o seguinte código foram realizadas as simulações para m=1kg e k=900N/m e variando o valor de c para os casos $\xi < 1$, $\xi = 1$ e $\xi > 1$, considerando t de 0 a 1s:

```
// Simulacao de sistema linear
// É sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear
clc
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;k=900;c=2*sqrt(k*m)

// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];

// Montando o sistema:
sistema=syslin('c',A,B,C,D);

// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e=[0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,sistema,x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',2)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Velocidade da massa')
```

Para $\xi = 0.5 < 1$, definiu-se a seguir a deformação da mola e velocidade da massa:

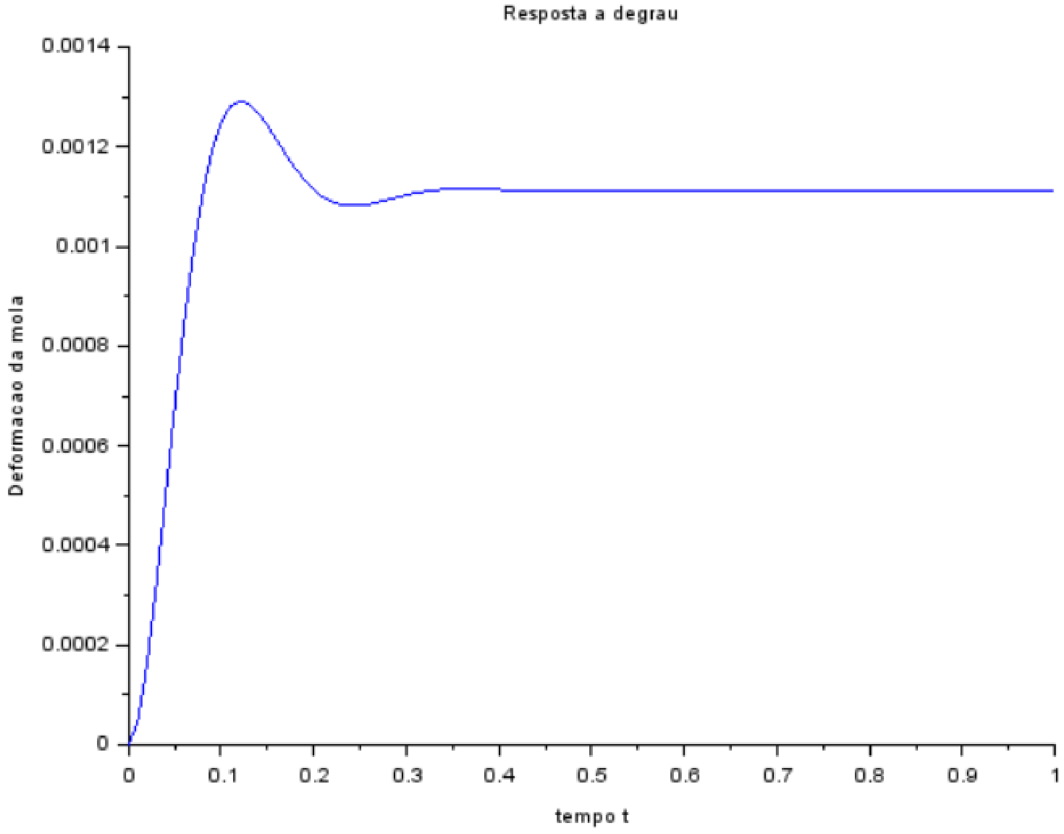


Figura 1 – Deformação da mola

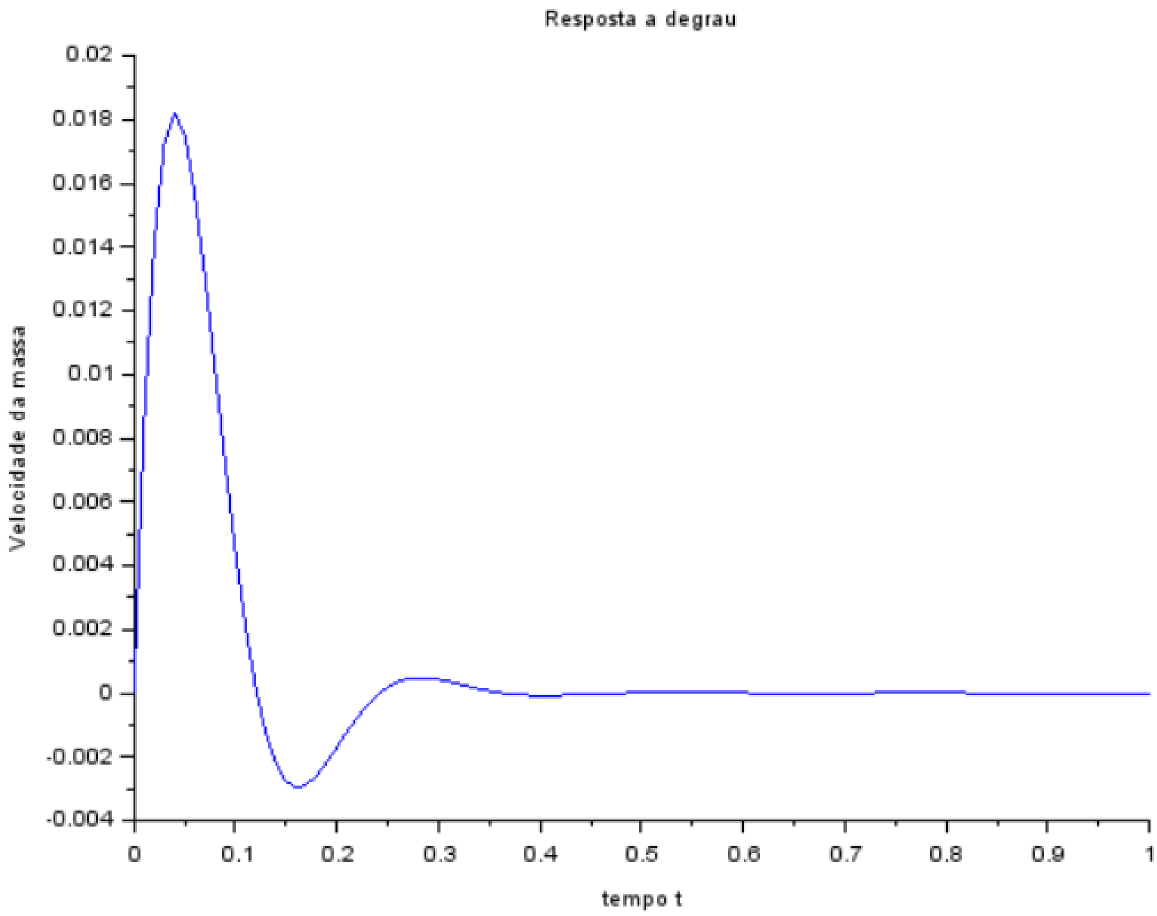


Figura 2 – Velocidade da massa

Para $\xi = 1$:

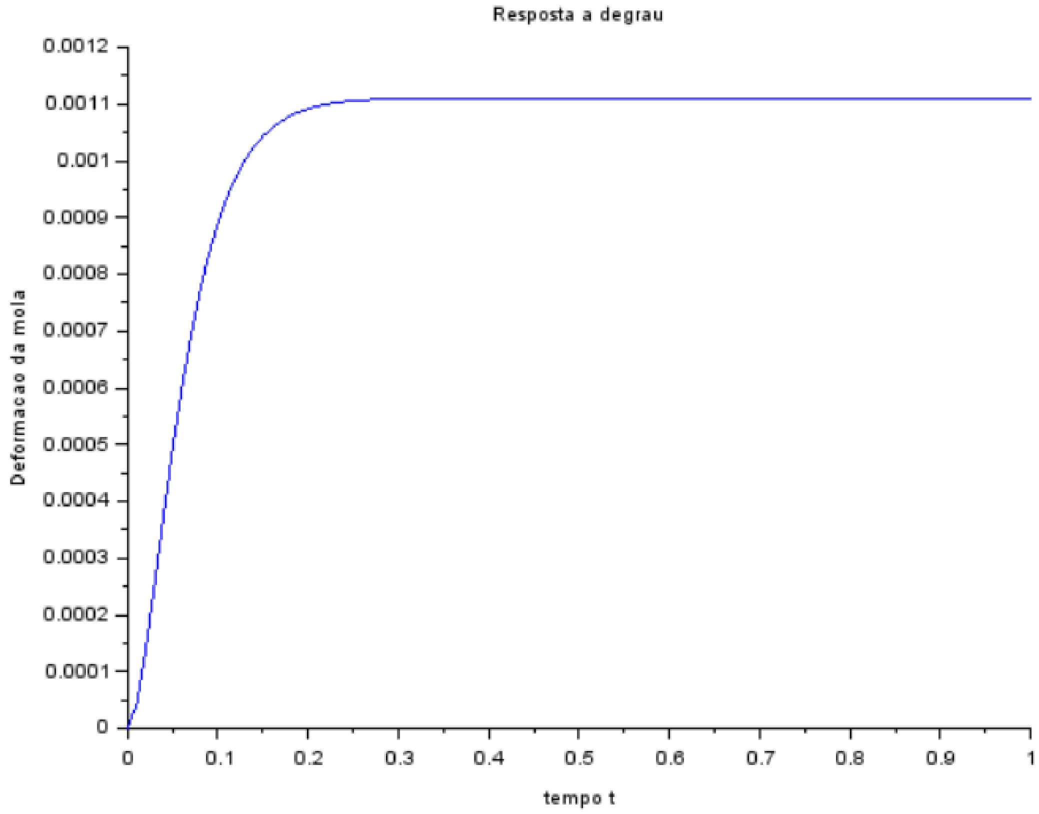


Figura 3 – Deformação da mola

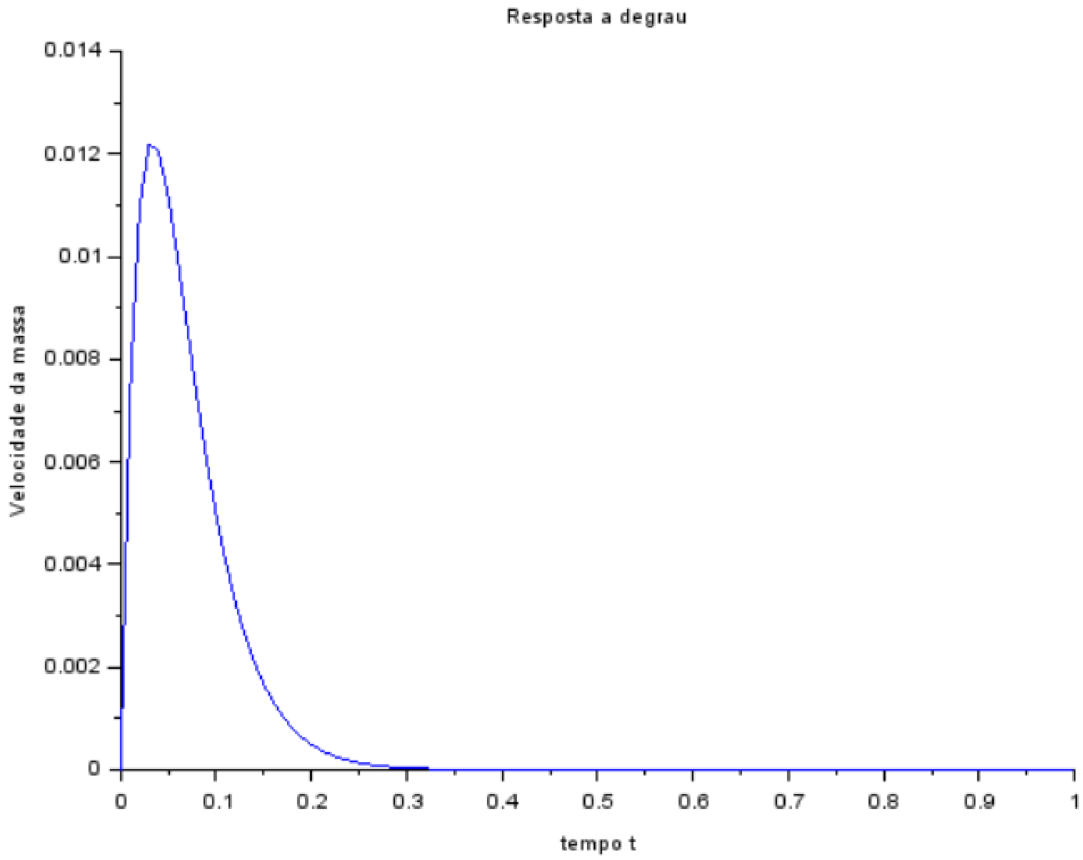


Figura 4 – Velocidade da massa

Para $\xi = 2 > 1$:

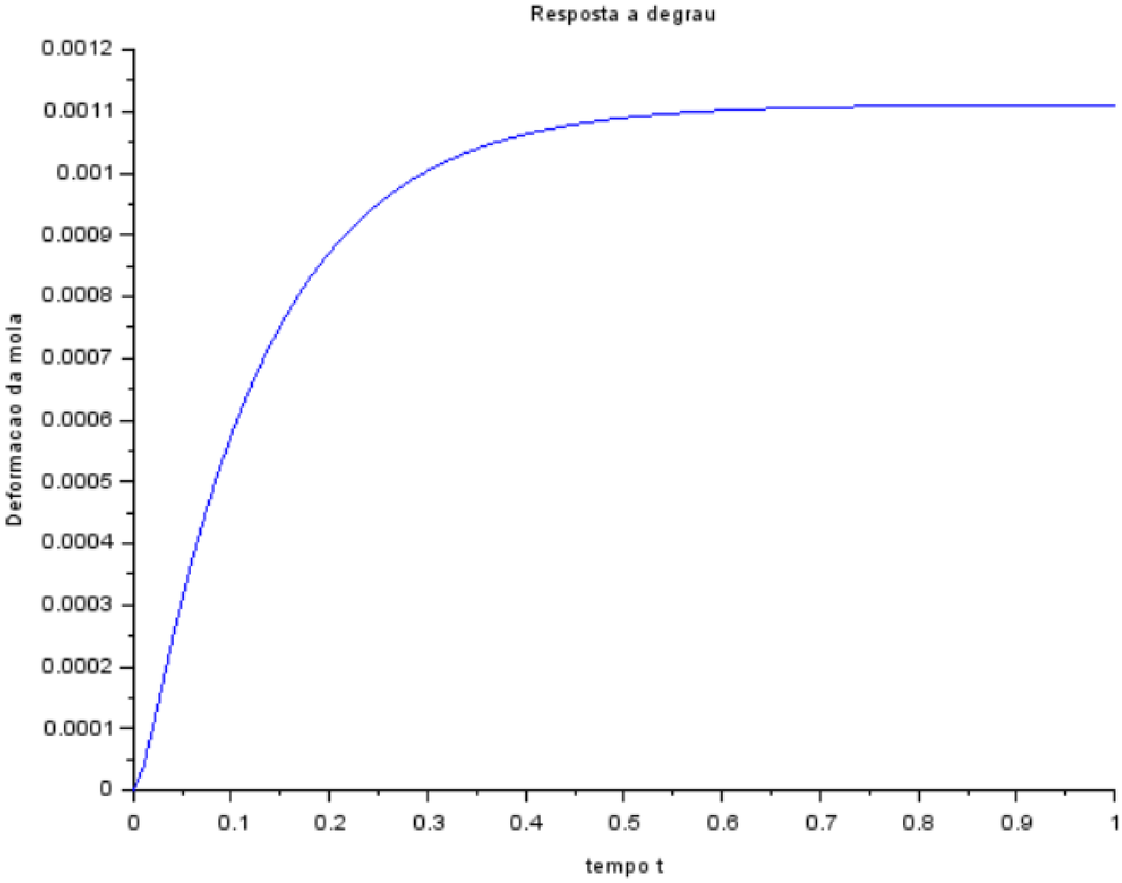


Figura 5 – Deformação da mola

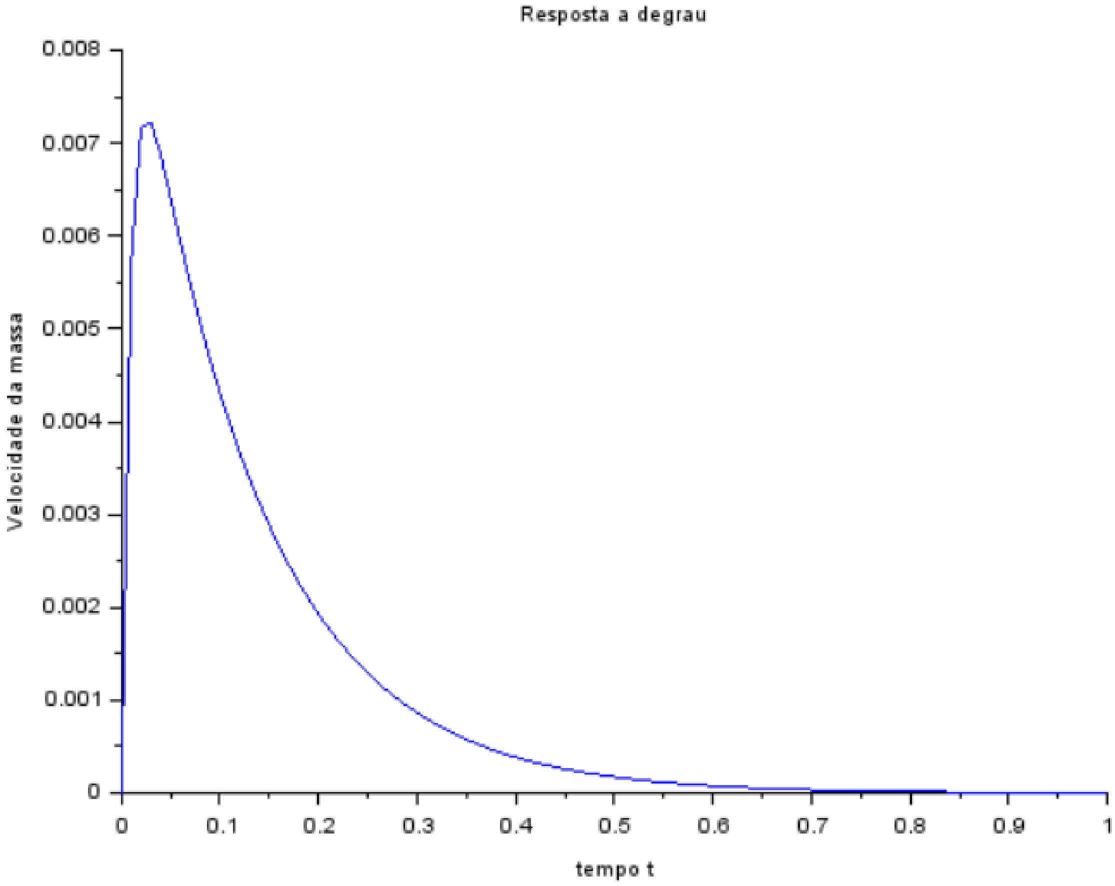


Figura 6 – Velocidade da massa

Lição de casa:

1 – Considerando o exercício anterior, calcule os autovalores da matriz A e calcule as raízes do polinômio no denominador da função de transferência e compare. Estas raízes (e os autovalores) são os pólos do sistema. Para o caso $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$, observe que as raízes (e também os autovalores) são números complexos. Verifique que o módulo deste número complexo é igual à freqüência natural do sistema massa-mola-amortecedor. Verifique ainda que dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento. Observe que a freqüência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do pólo.

Calculando os autovalores de A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}$$

$$\det|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda = -\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}} = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4km}{m^2}}}{2}$$

Determinando as raízes do polinômio no denominador da função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{(ms^2 + k + cs)}$$

$$ms^2 + cs + k = 0$$

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

Para $\xi < 1$, $c < 2\sqrt{km}$ e $c^2 - 4km < 0$, logo os autovalores de A ou as raízes de s são números complexos para esse caso, tendo parte real igual a $-\frac{c}{2m}$ e parte imaginária igual a $\frac{\pm\sqrt{4km - c^2}}{2m}i$.

O módulo dos pólos complexos do sistema será então dado por:

$$\|p\| = \sqrt{\left(-\frac{c}{2m}\right)^2 + \left(\frac{\pm\sqrt{|c^2 - 4km|}i}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2 - c^2 + 4km}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Percebe-se que o módulo é igual à frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dividindo-se o módulo da parte real do pólo complexo pelo módulo do número complexo obtém-se:

$$\frac{\|p_{real}\|}{\|p\|} = \frac{\frac{c}{2m}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \xi$$

O cálculo da frequência de oscilação amortecida é dada por $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, desenvolvendo a equação:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{2\sqrt{km}}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{4km}{4km} - \frac{c^2}{4km}\right)} = \frac{1}{2m}\sqrt{4km - c^2}$$

Sendo ela igual ao módulo da parte complexa do pólo.

2 – Simule o sistema do exercício para entrada nula e diferentes condições iniciais não nulas. Mostre o gráfico de *v* por *x*, e experimente mudar os parâmetros do sistema, tal que se obtenha 3 situações diferentes: pólos complexos, pólos reais e iguais, e pólos reais e distintos. O resultado pretendido são três figuras. Na primeira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam complexos. Na segunda figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e iguais. Na terceira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e distintos. Para cada figura construa outra figura mostrando os pólos correspondentes no plano complexo. Observe a ligação entre o comportamento transitório e a posição dos pólos no plano complexo.

Foram realizadas as simulações para os casos de pólos complexos ($\xi = 0.5 < 1$), pólos reais e iguais ($\xi = 1$) e pólos reais e distintos ($\xi = 2 > 1$) considerando a entrada nula e as condições iniciais $[1;0]$, $[0;1]$, $[1;1]$, $[2;1]$ e $[1;2]$.

Para $\xi = 0.5$:

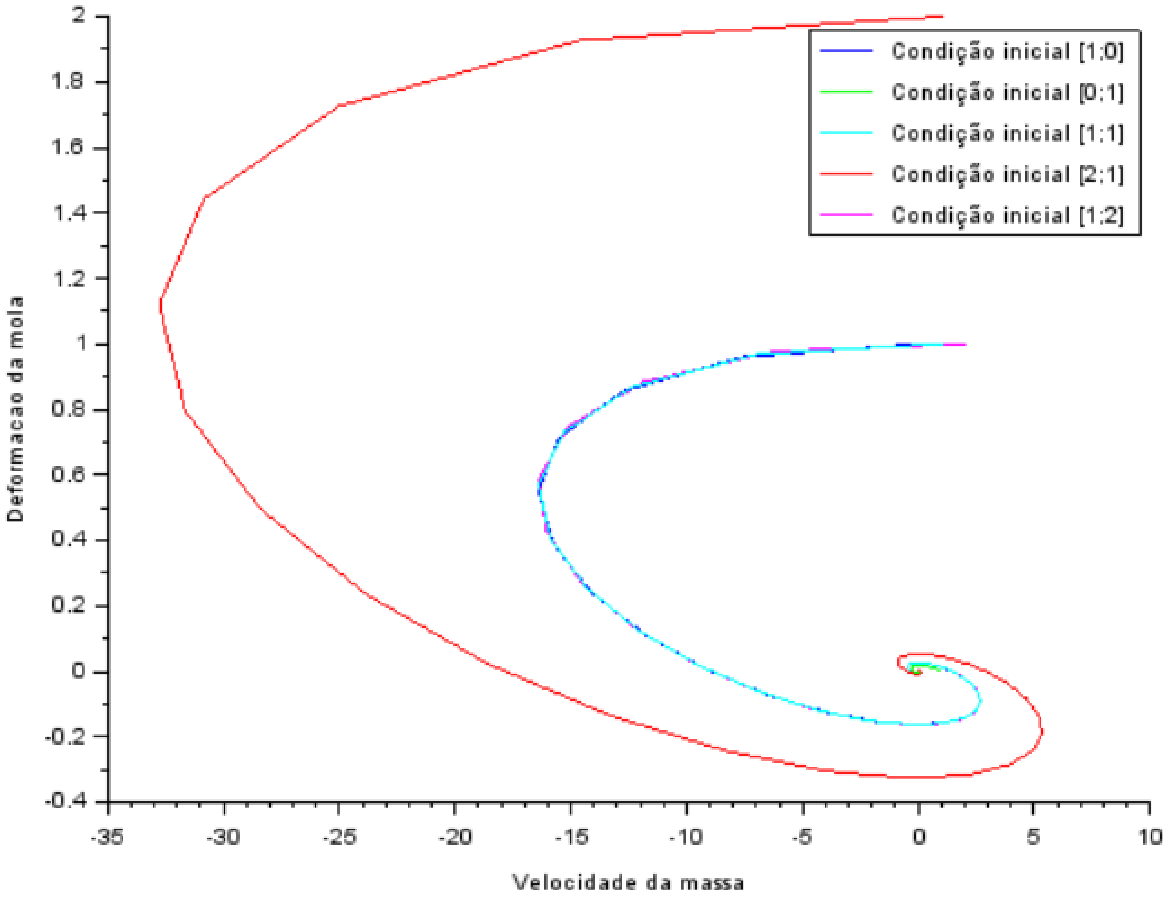


Figura 7 – Velocidade da massa por deformação da mola

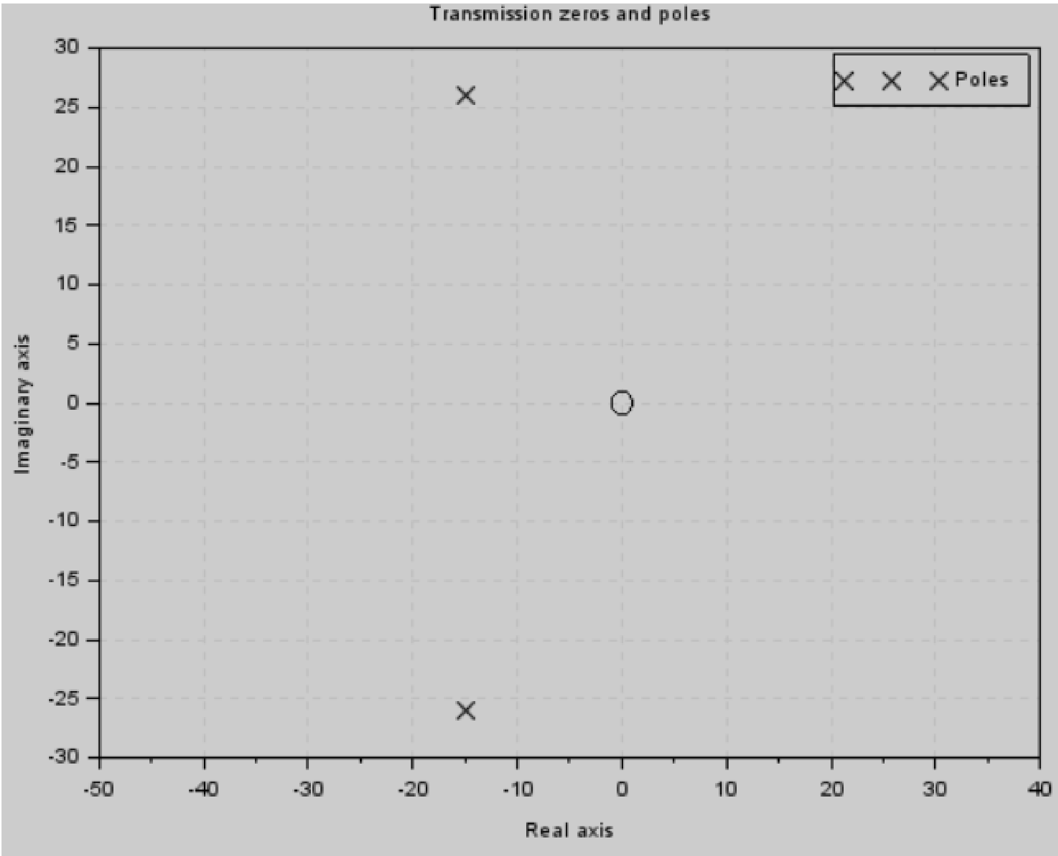


Figura 8 – Pólos do sistema no plano imaginário

Para $\xi = 1$:

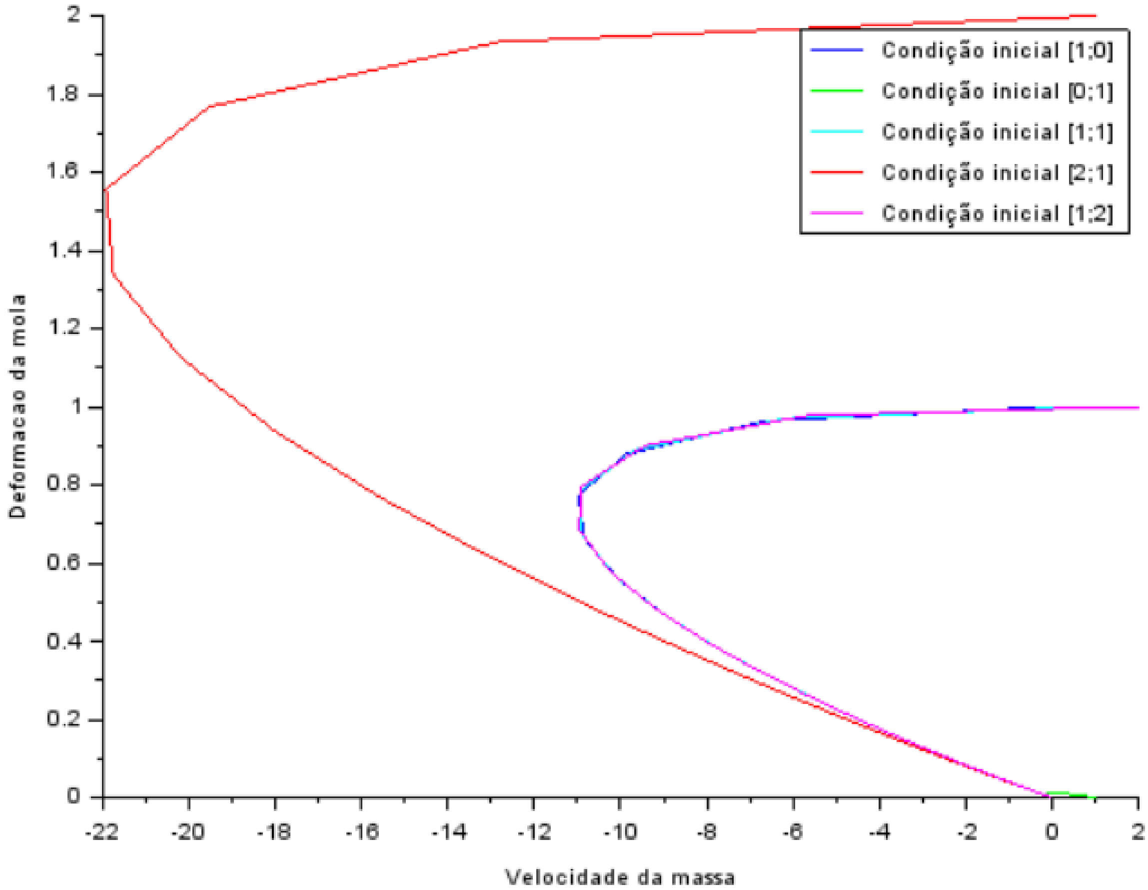


Figura 9 – Velocidade da massa por deformação da mola

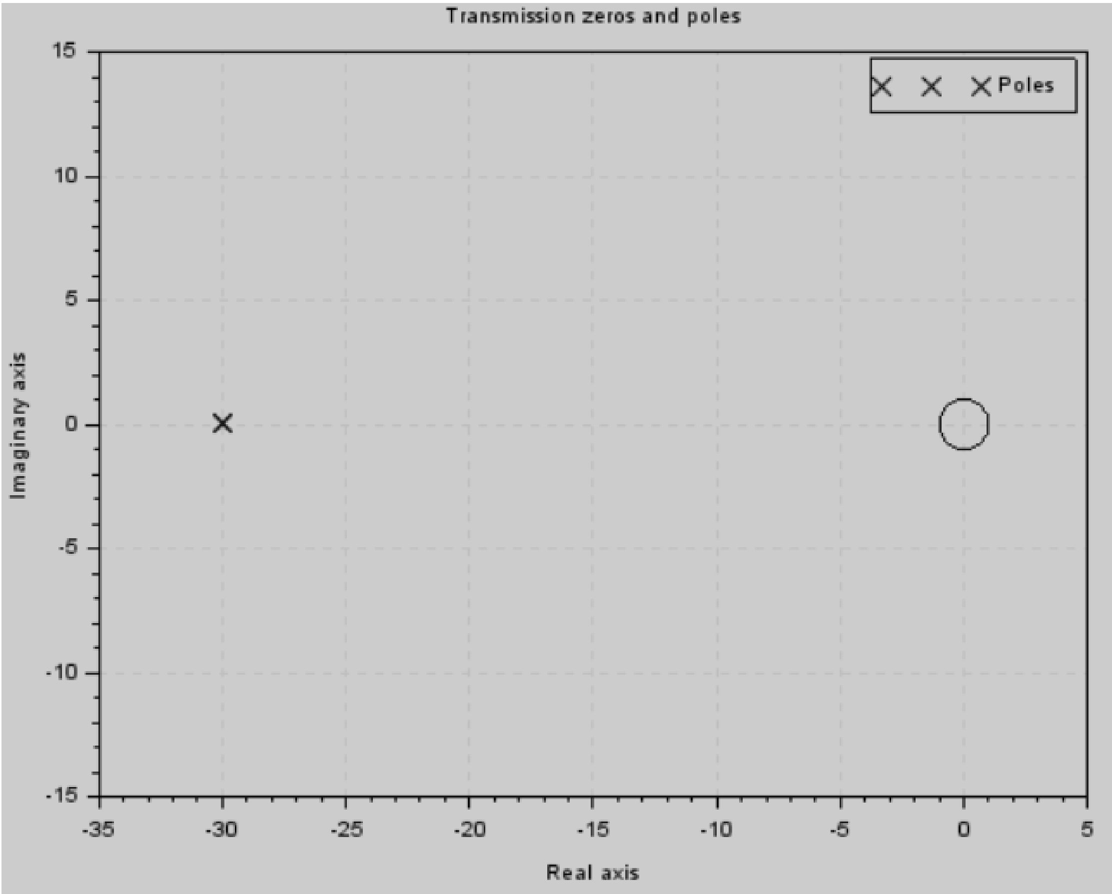


Figura 10 – Pólos do sistema no plano imaginário

Para $\xi = 2$:

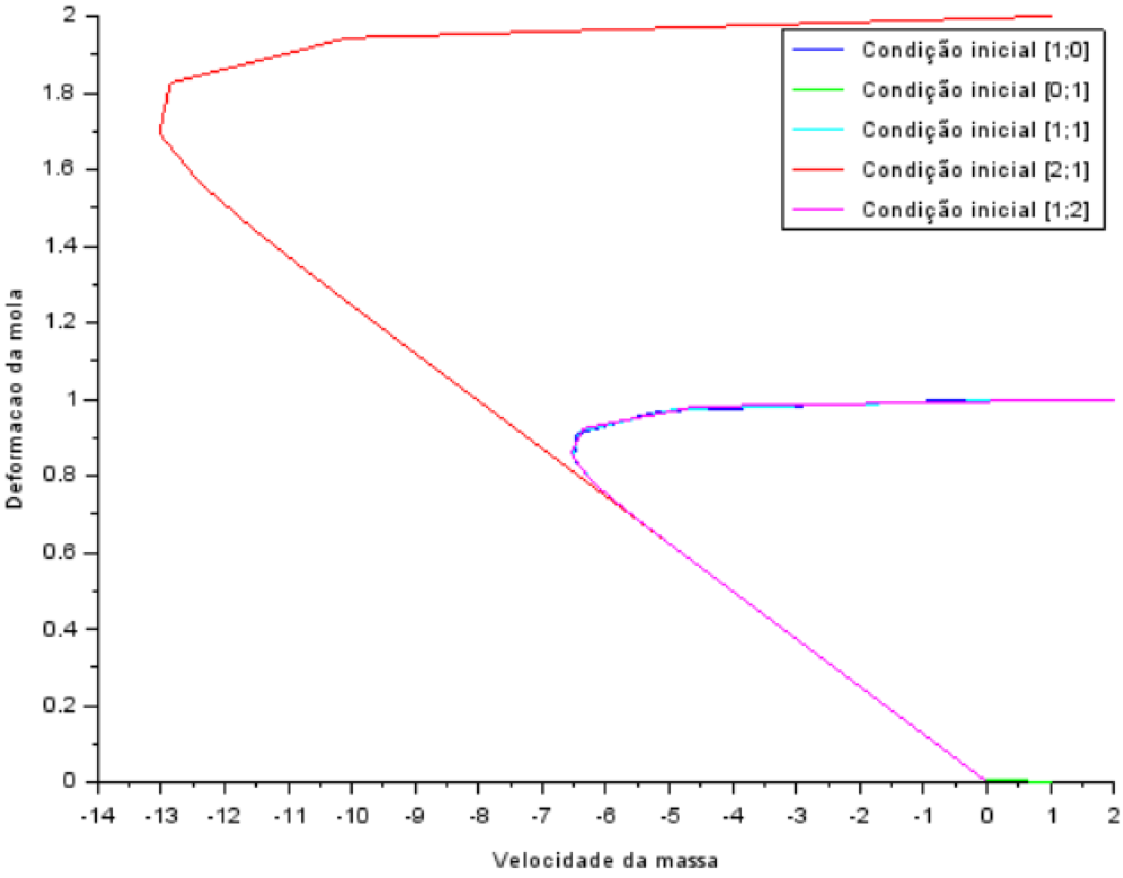


Figura 11 – Velocidade da massa por deformação da mola

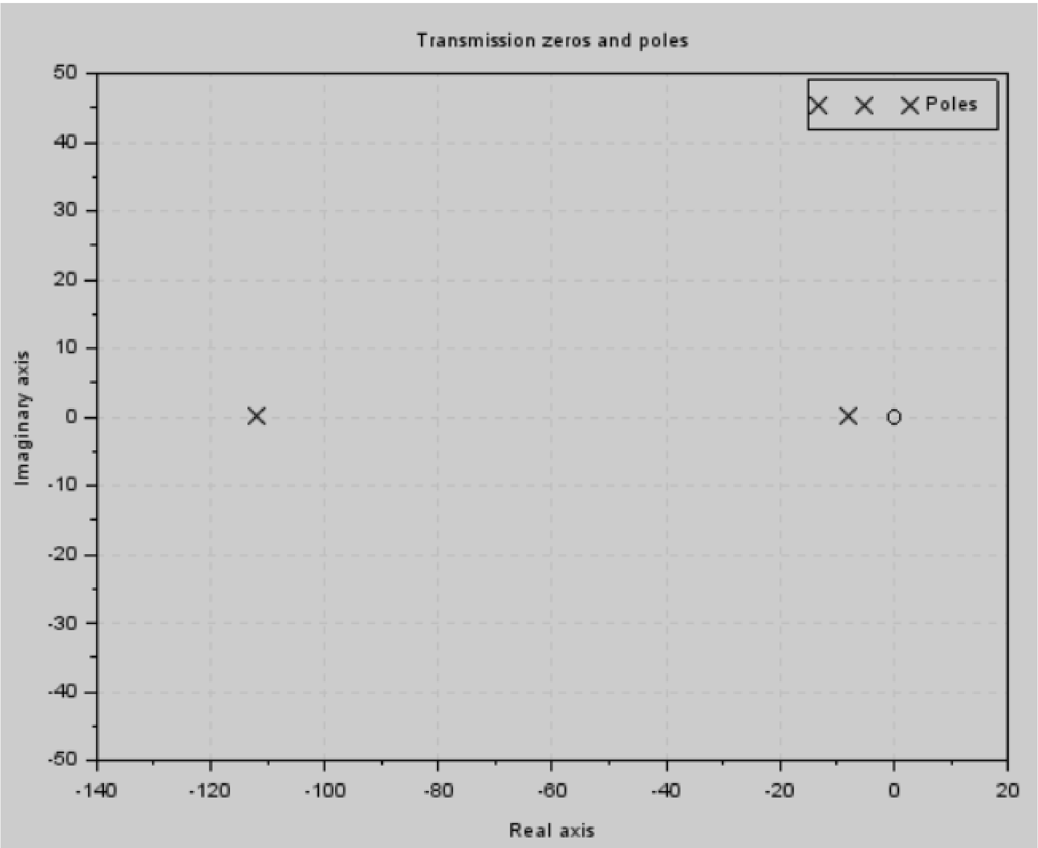


Figura 12 – Pólos do sistema no plano imaginário