PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Escola Politécnica da USP

Lista E

Professores: Dr. Décio Crisol Donha
Dr. Agenor T. Fleury

Aluno: Arthur Henrique Gomes de Pinho
N°USP:10379756

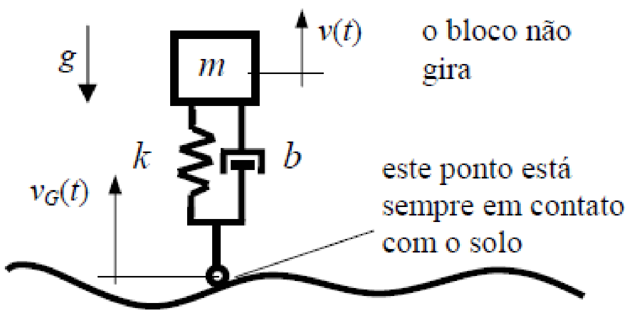
2020

OBJETIVO

Essa lista objetiva observar o comportamento de um sistema por meio da análise transitória. Através da simulação numérica do modelo matemático é possível obter a análise transitória. A simulação numérica é feita a partir da integração numérica das equações diferenciais que representam o comportamento do sistema.

EXEMPLO

Tem-se a análise da suspensão de um carro como exemplo:



Esse exemplo pode ser descrito através do seguinte espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = +0x_1 + 1x_2 - 1u \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{b}{m}x_2 + \dfrac{b}{m}u \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{b}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{u}_{\mathbf{u}}$$

$$y = +1x_1 + 0x_2 + 0u \qquad \underbrace{y}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{u}_{\mathbf{u}}$$

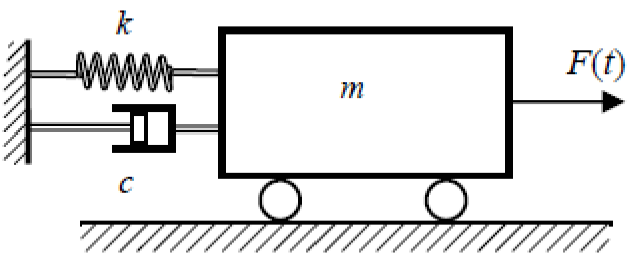
O espaço de estados fornece a função de transferência G(s), que é a relação entre a transformada de Laplace da saída y e a transformada de Laplace da entrada u, considerando condições iniciais nulas.

$$Y = \underbrace{\frac{-ms}{ms^2 + bs + k}}_{G(s)} U \Rightarrow Y = G(s)U$$

$$G(s) = \frac{Y}{U} \Rightarrow G(s) = \frac{-ms}{ms^2 + bs + k}$$

EXERCÍCIO 1

Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada F(t) do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação x(t) da mola como saída:

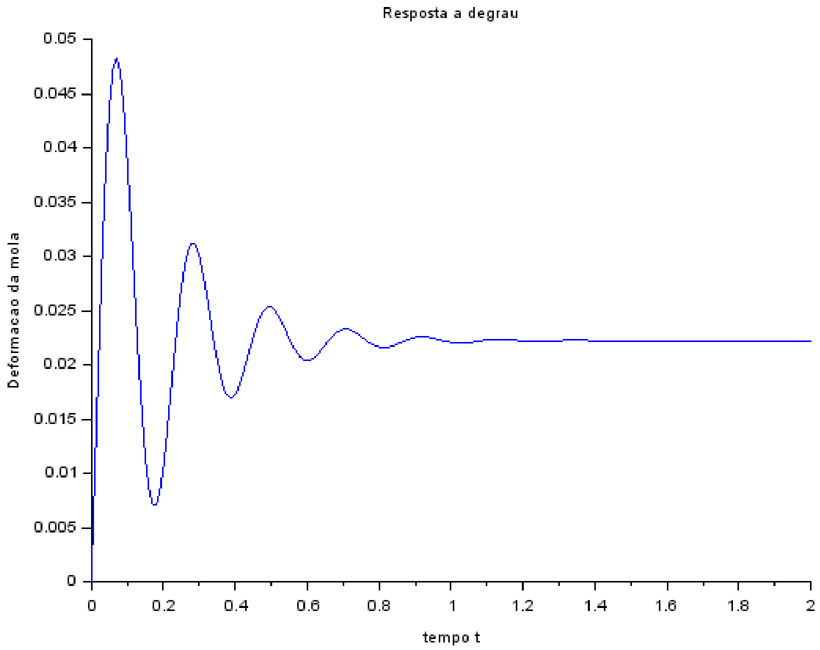


Simule o sistema para diferentes valores de m, c e k, de tal forma que se tenha uma simulação para cada um dos três casos a seguir:

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1, \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = 1, \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} > 1$$

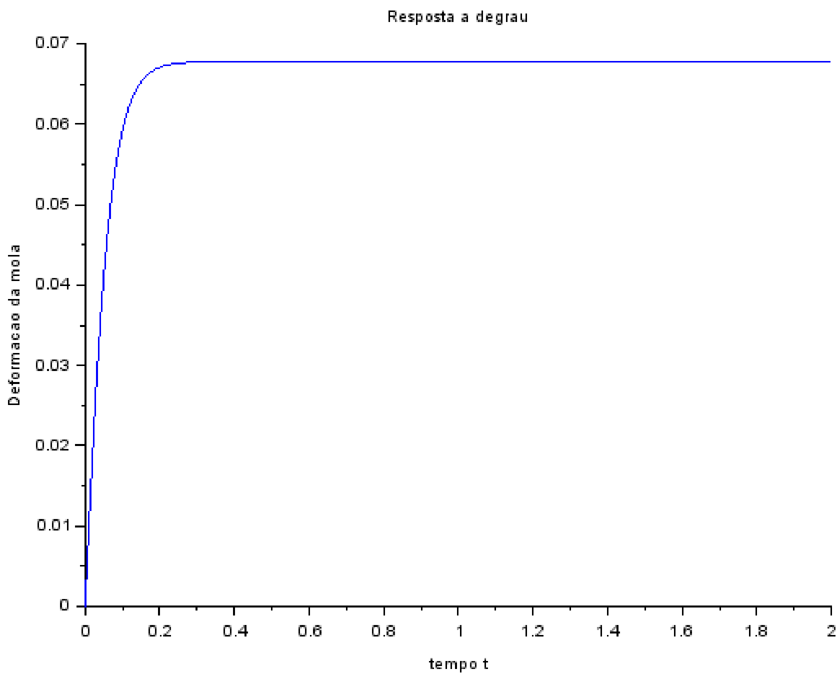
Considerando o exercício anterior, calcule os autovalores da matriz A e calcule as raízes do polinômio no denominador da função de transferência e compare. Estas raízes (e os autovalores) são os pólos do sistema. Para o caso 1, observe que as raízes (e também os autovalores) são números complexos. Verifique que o módulo deste número complexo é igual à freqüência natural do sistema massa-molaamortecedor. Verifique ainda que dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento. Observe que a freqüência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do pólo.

Para Zeta = 0,17, têm-se:



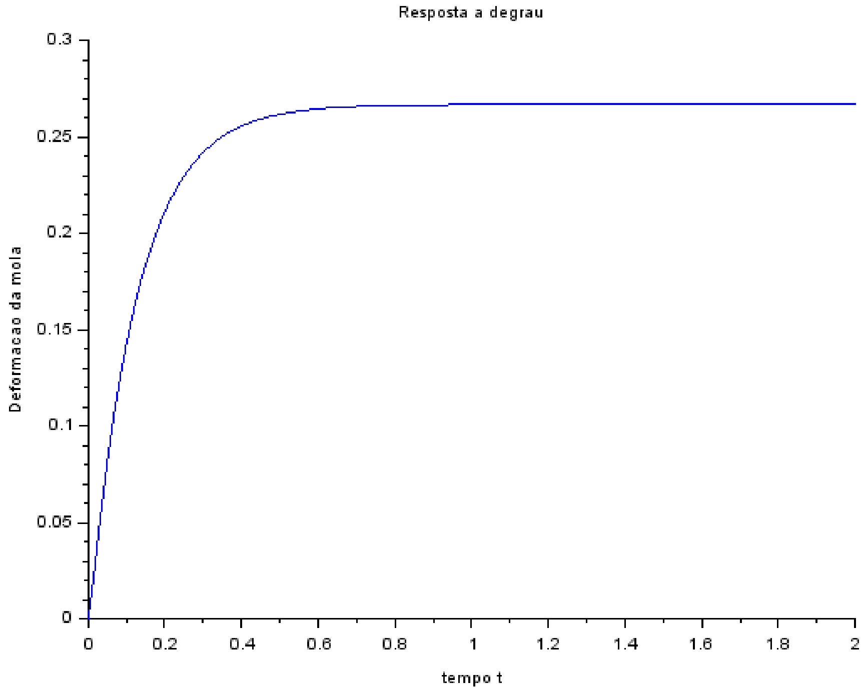
É possível perceber o comportamento subcrítico do sistema através do gráfico.

Já para Zeta = 1, têm-se:



O que fornece um sistema com amortecimento crítico.

E, por fim, para Zeta = 2,17 > 1, têm-se:



Observa-se um sistema supercrítico.

EXERCÍCIO 2

Simule o sistema do exercício para entrada nula e diferentes condições iniciais não nulas. Mostre o gráfico de v por x, e experimente mudar os parâmetros do sistema, tal que se obtenha 3 situações diferentes: pólos complexos, pólos reais e iguais, e pólos reais e distintos. O resultado pretendido são três figuras. Na primeira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam complexos. Na segunda figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e iguais. Na terceira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e distintos. Para cada figura construa outra figura mostrando os pólos correspondentes no plano complexo. Observe a ligação entre o comportamento transitório e a posição dos pólos no plano complexo.

Primeira Figura:

Entrada nula, pólos complexos, diversas condições iniciais:

Parâmetros: m=1;c=10;k=900;

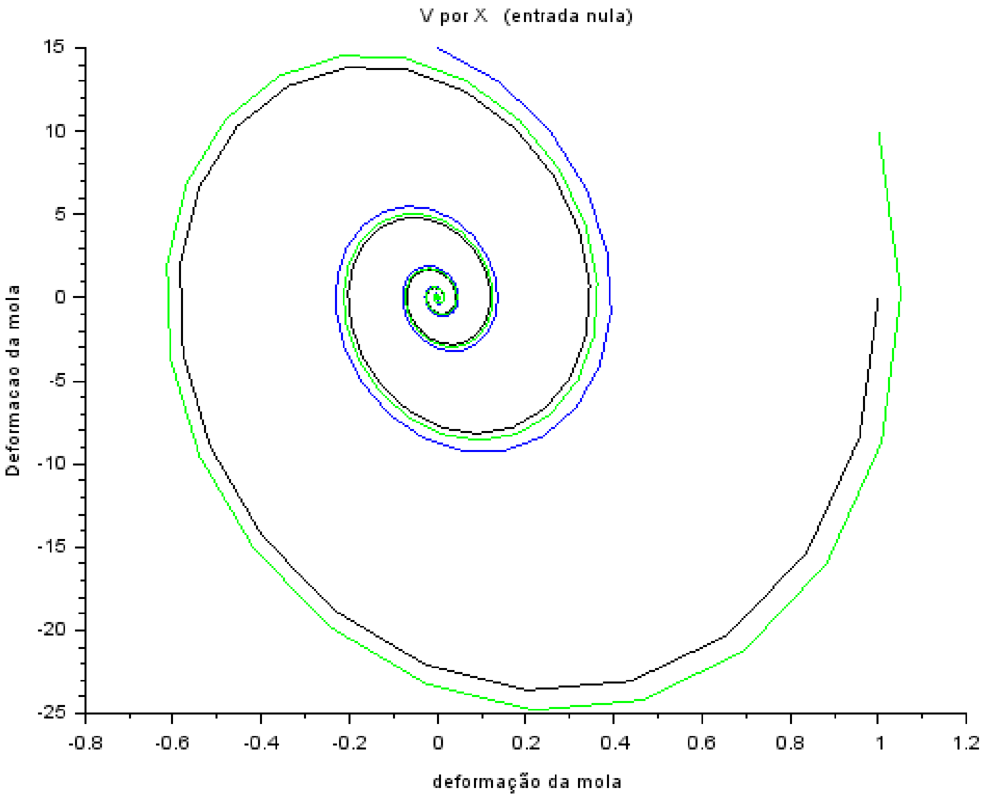
Zeta<1

Legenda:

Preto: x0 = 1 e v0 = 0

Azul: x0 = 0 e v0 = 15

Verde: x0 = 0 e v0 = 10



Segunda Figura:

Entrada nula, pólos reais e iguais, diversas condições iniciais:

Parâmetros: m=1;c=60;k=900;

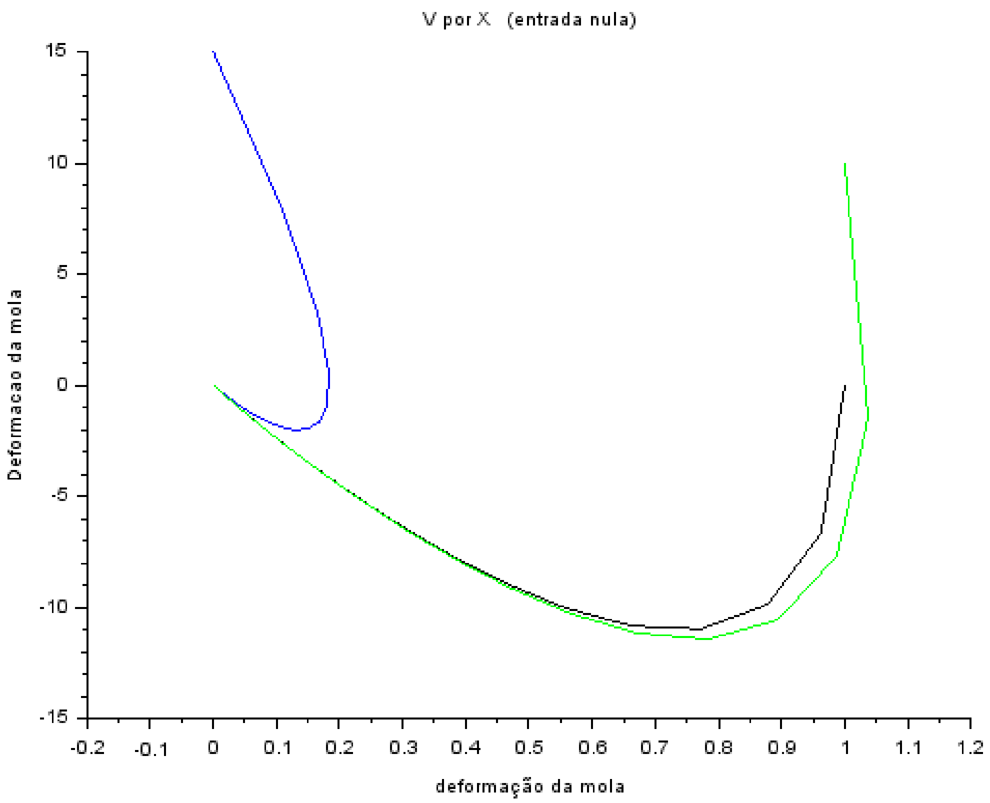
Zeta=1

Legenda:

Preto: x0 = 1 e v0 = 0

Azul: x0 = 0 e v0 = 15

Verde: x0 = 0 e v0 = 10



Terceira Figura:

Entrada nula, pólos reais e distintos, diversas condições iniciais:

Parâmetros: m=1;c=120;k=900;

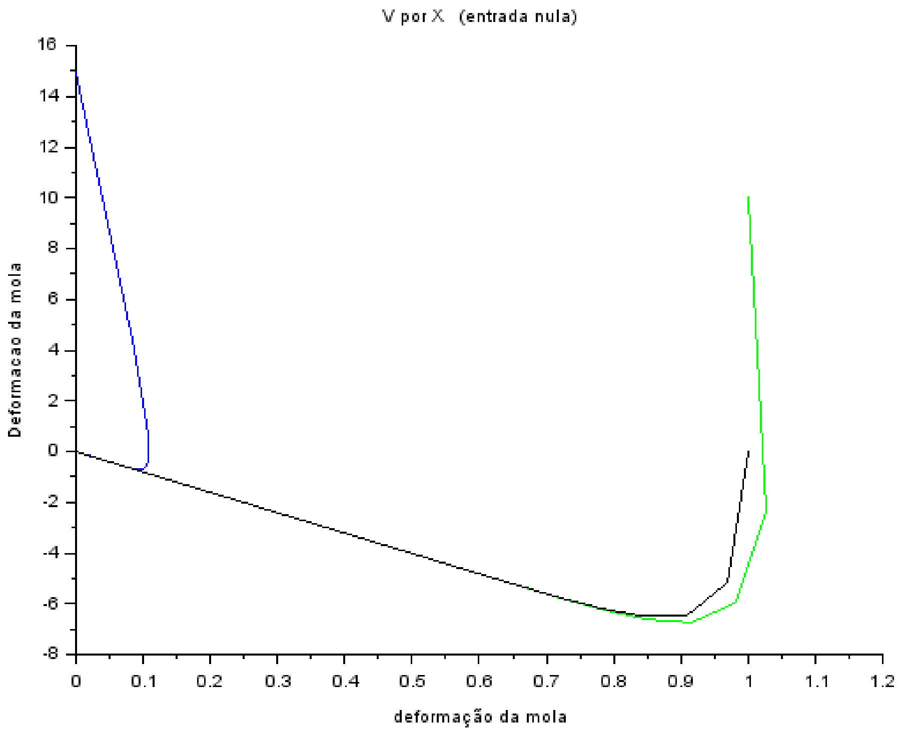
Zeta>1

Legenda:

Preto: x0 = 1 e v0 = 0

Azul: x0 = 0 e v0 = 15

Verde: x0 = 0 e v0 = 10

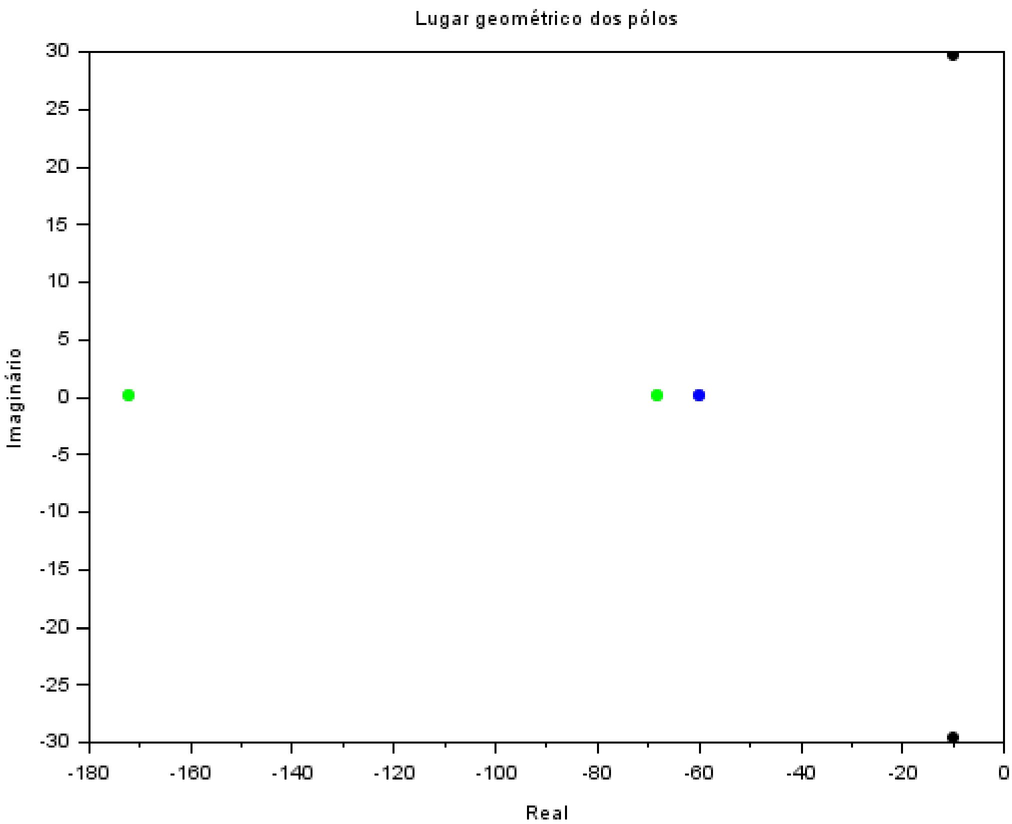


Lugar geométrico dos pólos no plano complexo:

Preto – zeta < 1

Azul – zeta = 1

Verde – zeta > 1



Percebe-se a partir da análise dos lugares geométricos dos pólos no plano complexo que posição dos pólos não depende das condições iniciais, mas sim dos parâmetros pré-estabelecidos. Logo, os pólos não são influenciados pelo comportamento transitório do sistema.

ANEXO

Código Scilab:

```
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;c=10;k=900;
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;0];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
//casos=[[1;0];[0;15];[0;10]];
x0=[1,0,0];
v0=[0,15,40];
//x0e=[1;0];  // neste caso, x1(0)=0   e   x2(0)=0
n=3;
for i=1:n
   // Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
   [y,x]=csim(u,t,suspensao,[x0(i);v0(i)]);
   // Abrindo uma nova janela de graficos:
   xset('window',1)
   //// Mostrando o resultado da simulacao:
   plot2d(t,y,3)
   xtitle('Resposta a entrada nula','tempo t','Deformacao da mola')

   //polos
   x1 = (-c-sqrt(c*c-4*m*k)/(2*m));
   x2 = (-c+sqrt(c*c-4*m*k)/(2*m));
   xset('window',2)

   plot(real(x1),imag(x1),".g");
   plot(real(x2),imag(x2),".g");
   xtitle('Lugar geométrico dos pólos','Real','Imaginário')

   zeta = c/(2*sqrt(k*m));
   //
   xset('window',3)
   figure(3);
   plot2d(y,x(2,:),i);
   xtitle('V por X   (entrada nula)','deformação da mola','Deformacao da mola')

end
```