PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

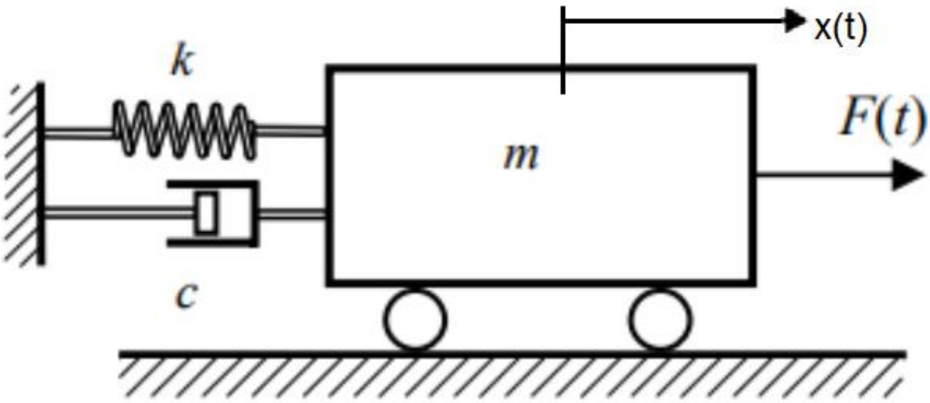
Lista E – 22/10/2020

Gabriel Barbosa Paganini – NUSP 10772539

Exercício 1 – Equacionamento do sistema massa, mola e amortecedor:

No primeiro exercício, pede-se para deduzir a equação regente do sistema para análise do deslocamento e velocidade do bloco, como mostra a Figura 1. O sistema será analisado sobre dois métodos: pela abordagem por vetor de estados e autovalores; e pela transformada de Laplace com função de transferência correspondente.

Figura 1 - Desenho esquemático do sistema massa, mola e amortecedor



Aplicando a 2ª lei de newton no sistema, temos a equação:

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = F(t)$$

O vetor de estados do sistema para $\ddot{x}$ e $\dot{x}$ pode ser escrito matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -{}^{k}/_{m} & -{}^{c}/_{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{1}/_{m} \end{bmatrix} F(t)$$

Para o primeiro método, calcularemos os autovalores α da matriz A:

$$det \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -{}^{k}/_{m} & -{}^{c}/_{m} - \alpha \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

No segundo método, utilizaremos a função de transferência $G(s)$ para calcular raízes:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \rightarrow ms^2 + cs + k = 0 \rightarrow s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Como esperado, os autovalores α da matriz A são equivalentes às raízes s da função de transferência $G(s)$, uma vez que o método de resolução não altera o resultado obtido do sistema. Também podemos perceber que, para $\frac{c}{2\sqrt{km}} < 1$, a equação apenas terá soluções complexas devido ao delta da equação.

Em seguida, calcula-se a frequência natural do sistema, desprezando-se o termo forçante para a solução homogênea:

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = 0 \;\; \rightarrow \;\; x(t) = A \cdot e^{t*\frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}} + B \cdot e^{t*\frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \;\; ; \;\; c' = 2\sqrt{km} \, ; \;\; \epsilon = \frac{c}{c'} \;\; \rightarrow$$

$$\therefore x(t) = e^{-\epsilon\omega t}\left(A \cdot e^{i\omega t\sqrt{1-\epsilon^2}} + B \cdot e^{-i\omega t\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)$$

Exercício 2 – Simulação numérica do sistema massa, mola e amortecedor:

Com base no espaço de estados obtido anteriormente, uma simulação numérica computacional para a solução do problema foi criada no programa *Scilab*.

A simulação possui duração de 10 segundos, analisou-se o espaço de estados composto pelo deslocamento x e velocidade v do bloco em relação às condições iniciais impostas de $x(0) = 2m$ e $\dot{x}(0) = 2m/s$. As constantes $m = 1kg$ e $k = 400\ N/m$ também foram arbitradas para a simulação.

A fim de entender a influência dos polos na solução, o fator de amortecimento c é variado em três cenários: polos complexos; polos reais e iguais; e polos reais e distintos. Os três espaços de estados gerados são apresentados respectivamente a seus casos nas figuras 2, 3 e 4:

Figura 2 - Espaço de estados com polos complexos

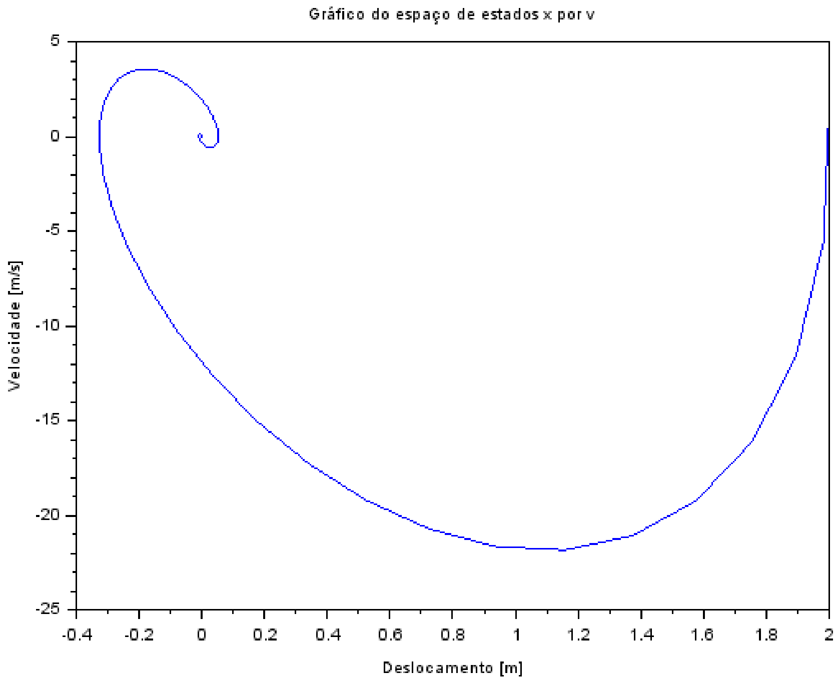


Figura 3 - Espaço de estados com polos reais e iguais

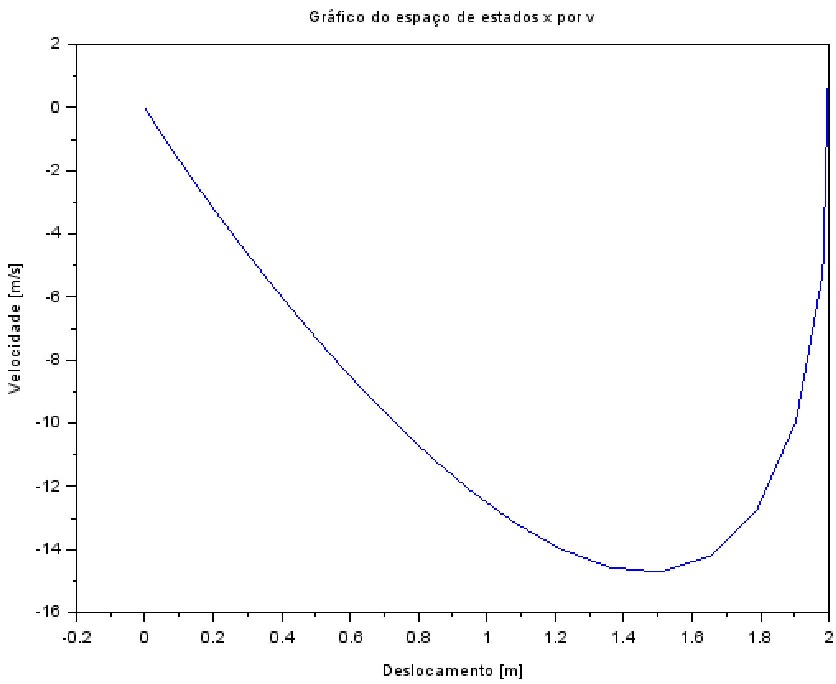
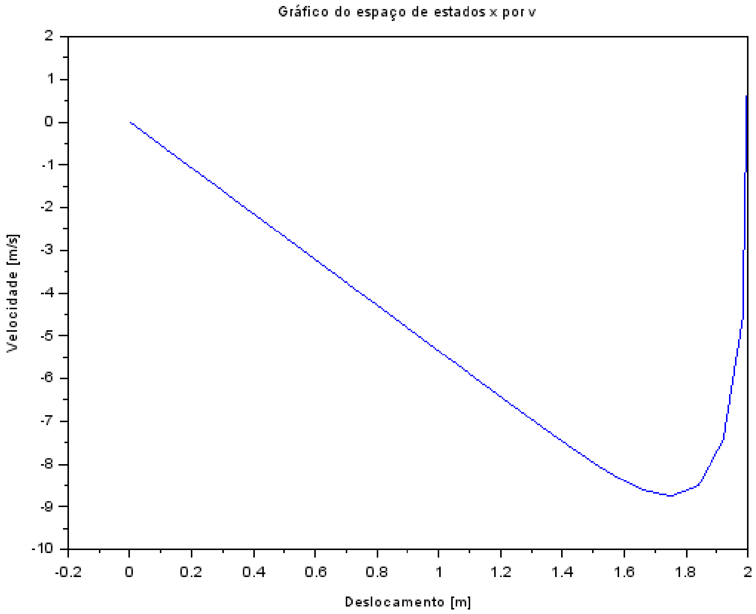


Figura 4 - Espaço de estados com polos reais e distintos



Código utilizado:

```
//Gabriel Barbosa Paganini - 10772539
//PME 3380 - Lista E
clear all
xdel()

// Definir parametros:
m=1;  //Massa do bloco [kg]
k=400;  //Constante da mola [N/m]

// Definir o vetor de instantes de tempo:
t=linspace(0,10,1000);

//Selecionar qual a solução analisada:
sol = 1;

//Raízes complexas:
if sol==1 then
    c = 20;  //coeficiente de amortecimento [N*s/m]

//Duas raízes reais iguais:
elseif sol==2 then
    c = 40;  //coeficiente de amortecimento [N*s/m]

//Duas raízes reais distintas:
else
    c = 80;  //coeficiente de amortecimento [N*s/m]
end
```

```
//Condições iniciais:
x0 = 2;  //Posição inicial do bloco [m]
xp0 = 2;  //Velocidade inicial do bloco [m/s]

//Vetor de estados:
funcprot(0)
   function dy=diferencial(t, y)
      dy(1)= y(2);
      dy(2)= -k*y(1)/m -c*y(2)/m;
   endfunction

//Solução por ODE:
result = ode([x0;xp0],0,t,diferencial);

x=result(1,:);  //Espaço de deslocamentos
xp=result(2,:); //Espaço de velocidades

//Plot do estado x por v
scf(1);
xtitle("Gráfico do espaço de estados x por v");
xlabel("Deslocamento [m]");
ylabel("Velocidade [m/s]");
plot(x,xp);
```