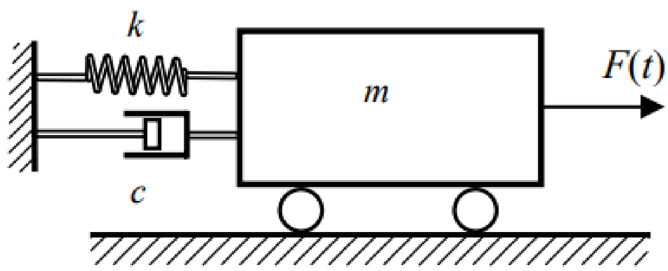
PME3380 - Lista E

Enzo Zugliani

22 de Outubro de 2020

- **Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada F(t) do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação x(t) da mola como saída**

Figura 1: Sistema massa-mola-amortecedor



O sistema pode ser representado pela seguinte sistema de equações diferenciais lineares:

$$\dot{x_1} = x_2 \tag{1}$$

$$\dot{x_2} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t) \tag{2}$$

Onde $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$. Na forma matricial, a representação se torna:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u \tag{3}$$

Considerando x_1 como a saída y e $F(t)$ como a entrada u, aplicando a transformada de Laplace na equação 2 (para condições iniciais nulas), e manipulando, encontra-se a função de transferência do sistema:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{4}$$

O sistema foi simulado para vários casos de ξ, os resultados estão nas figuras 2 a 4.

Figura 2: Sistema massa-mola-amortecedor, primeira simulação

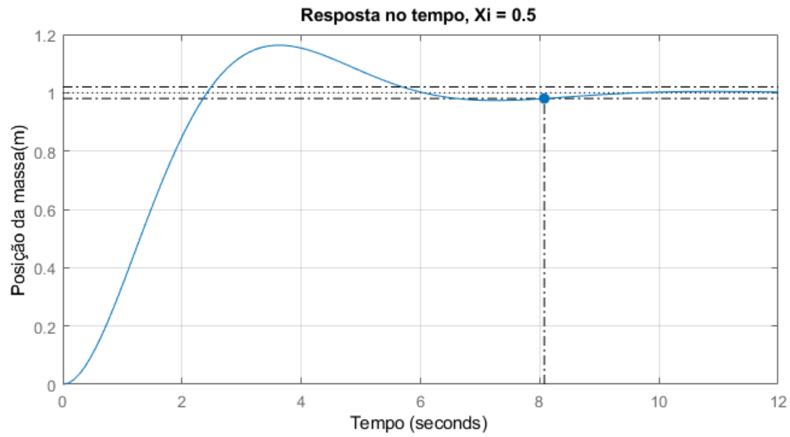


Figura 3: Sistema massa-mola-amortecedor, segunda simulação

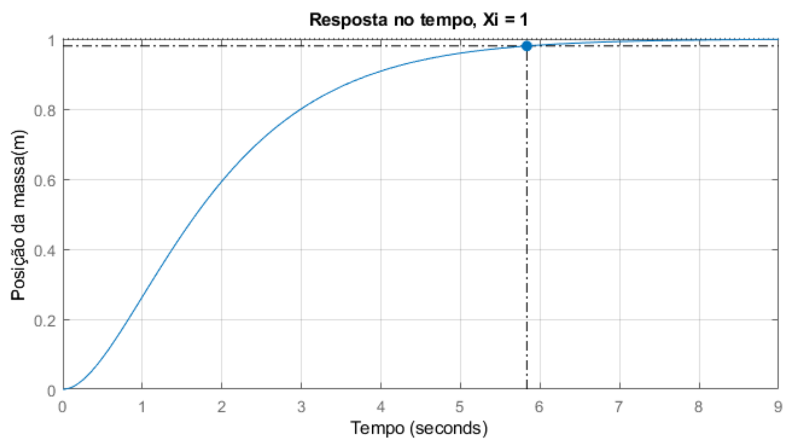
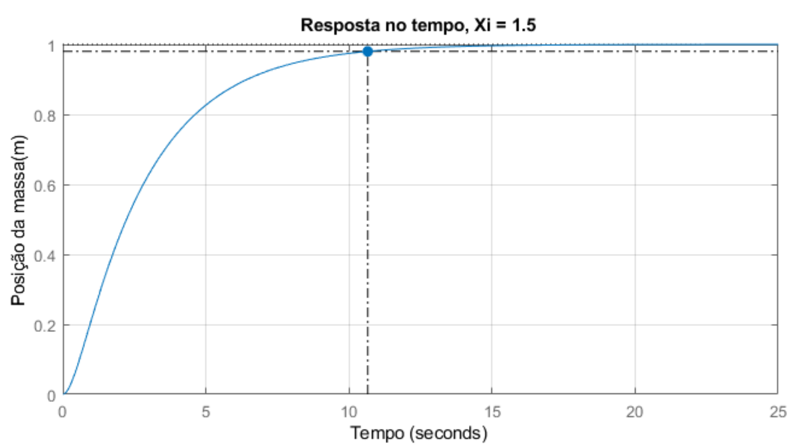


Figura 4: Sistema massa-mola-amortecedor, terceira simulação



- **Considerando o exercício anterior, calcule os autovalores da matriz A e calcule as raízes do polinômio no denominador da função de transferência e compare. Estas raízes (e os autovalores) são os pólos do sistema. Para o caso $\xi < 1$, observe que as raízes (e também os autovalores) são números complexos. Verifique que o módulo deste número complexo é igual à freqüência natural do sistema massa-mola amortecedor. Verifique ainda que dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento. Observe que a freqüência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do pólo.**

  Os autovalores da matriz A podem ser calculados igualando a zero o determinante da matriz $(\lambda I - A)$:

  $$det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda + \frac{c}{m} \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + \frac{c}{m}) + \frac{k}{m} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \tag{5}$$

  Já as raízes do denominador são encontradas igualando-o a zero:

  $$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \tag{6}$$

  Conclui-se que os autovalores da matriz A são também as raízes do denominador da função de transferência, e constituem os polos do sistema.

  Para o caso $m = c = k = 1$, os polos são:

  $$p_1 = -0.5 + 0.866i \tag{7}$$
  $$p_2 = -0.5 - 0.866i \tag{8}$$

  A frequência natural e o amortecimento valem:

  $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \tag{9}$$
  $$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 0.5 \tag{10}$$

  Verifica-se que o módulo dos polos complexos, $\sqrt{0.5^2 + 0.866^2}$ é igual à frequência natural ω_n, e possui valor unitário.

  Observa-se também que a divisão da parte real do polo pelo seu módulo resulta no coeficiente de amortecimento: $\frac{0.5}{1} = 0.5 = \xi$

  Finalmente, cumpre-se que a frequência de oscilação amortecida é igual ao módulo da parte imaginária dos polos: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{1 - 0.5^2} = 0.866$

- **Simule o sistema do exercício para entrada nula e diferentes condições iniciais não nulas. Mostre o gráfico de v por x, e experimente mudar os parâmetros do sistema, tal que se obtenha 3 situações diferentes: pólos complexos, pólos reais e iguais, e pólos reais e distintos. O resultado pretendido são três figuras. Na primeira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os**

mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam complexos. Na segunda figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e iguais. Na terceira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e distintos. Para cada figura construa outra figura mostrando os pólos correspondentes no plano complexo. Observe a ligação entre o comportamento transitório e a posição dos pólos no plano complexo.

As simulações foram realizadas, e os resultados estão apresentados nas figuras a seguir. O único parâmetro variado foi a constante c, enquanto manteve-se $m = k = 1$.

– Diferentes condições iniciais, mesmos parâmetros, polos complexos.

Figura 5: Polos

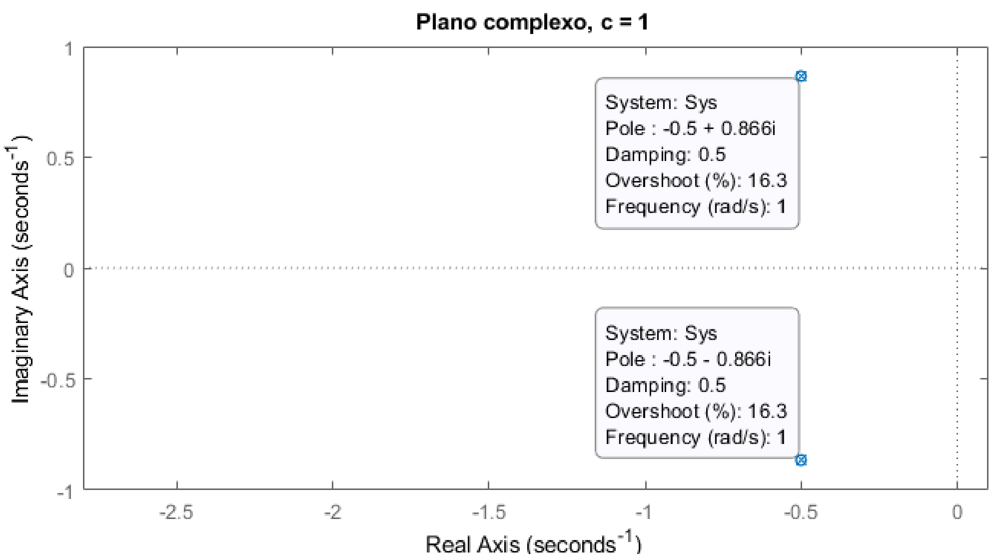


Figura 6: Resposta no tempo

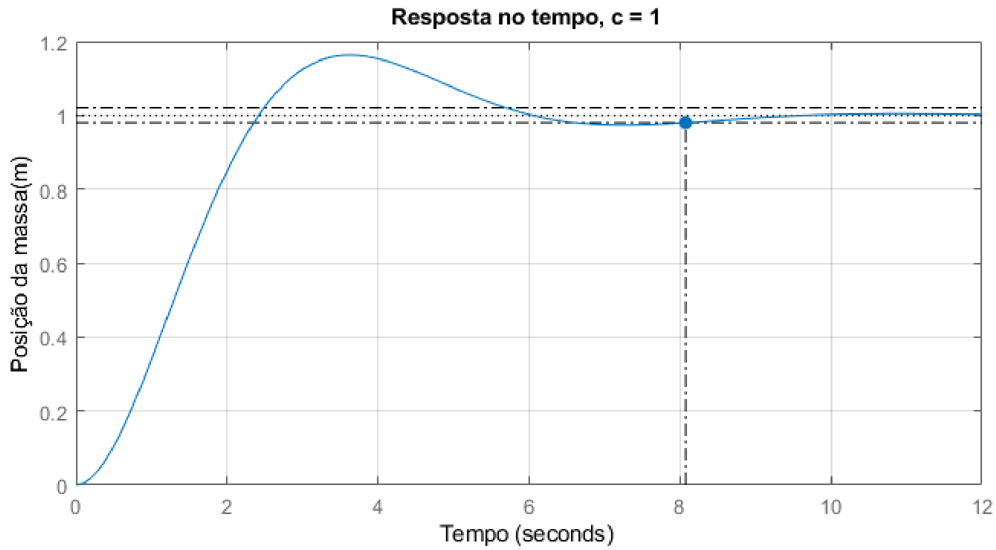
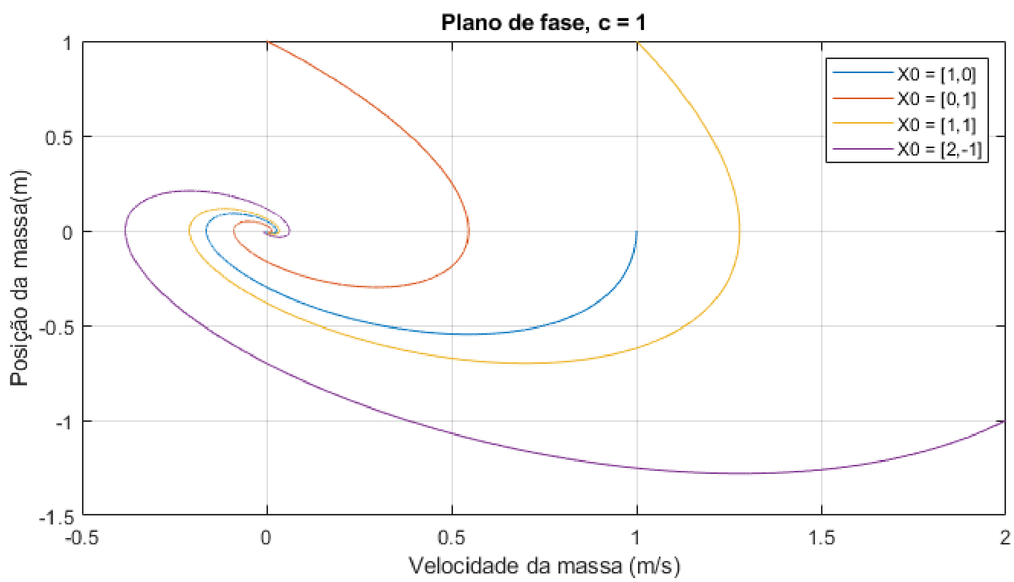


Figura 7: Plano de fases



– Diferentes condições iniciais, mesmos parâmetros, polos reais iguais.

Figura 8: Polos

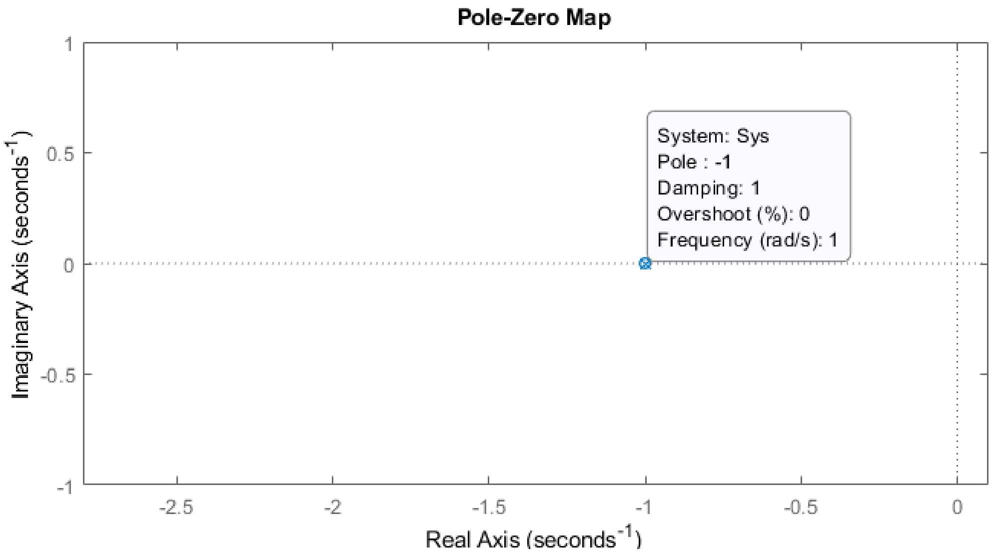


Figura 9: Resposta no tempo

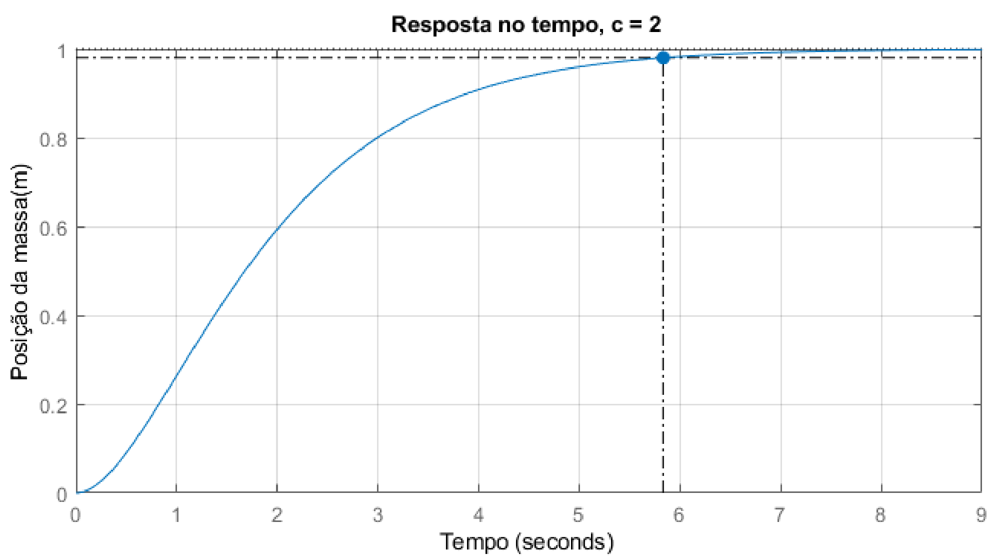
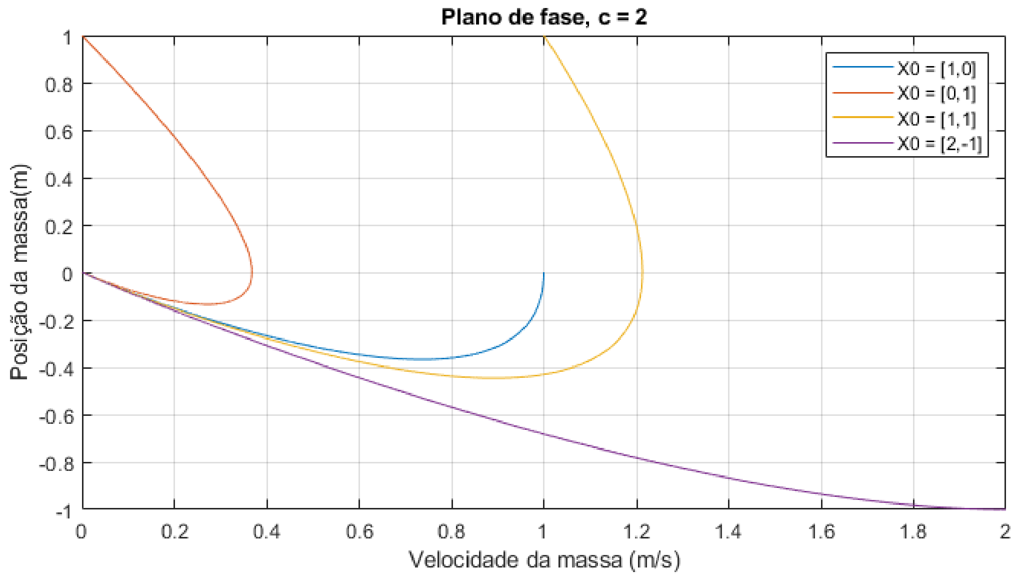


Figura 10: Plano de fases



– Diferentes condições iniciais, mesmos parâmetros, polos reais distintos.

Figura 11: Polos

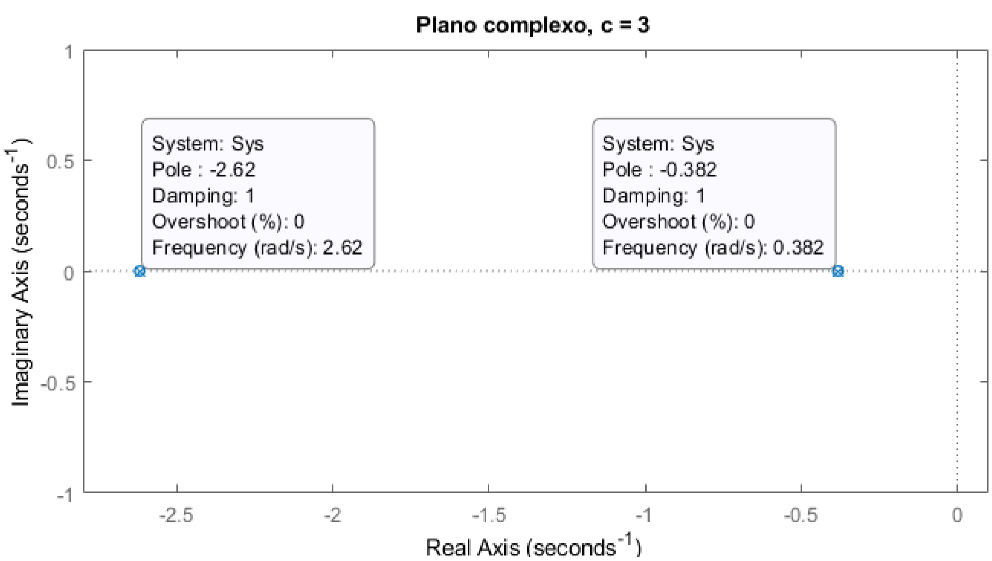


Figura 12: Resposta no tempo

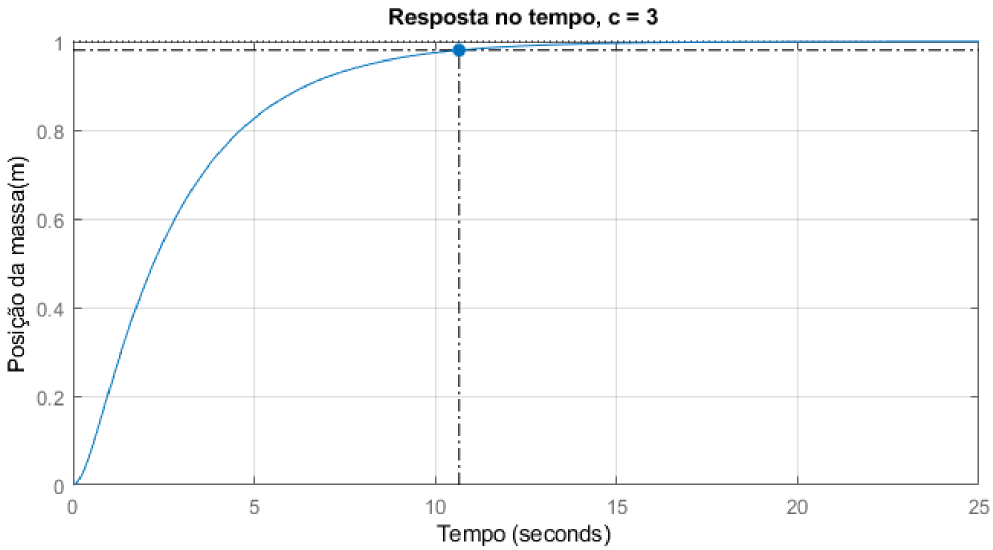
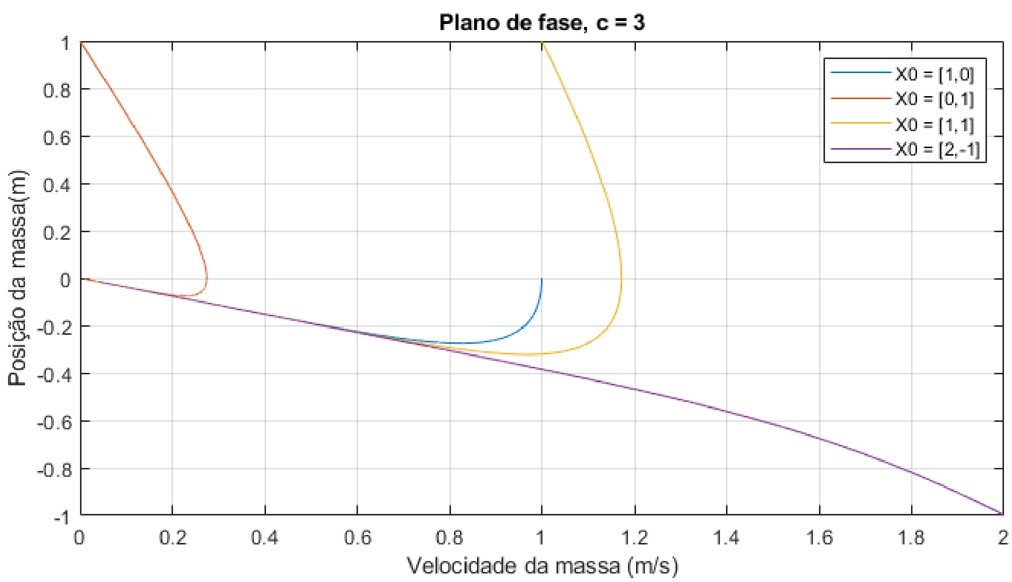


Figura 13: Plano de fases



Observa-se que a posição dos polos no plano complexo determina o comportamento transitório do sistema, como era esperado.