João Pedro Dias Nunes 10705846

Análise de um sistema massa mola amortecedor
PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Lista 5

Brasil

2020

Sumário

1 Introdução

Tomando como exemplo o sistema massa mola amortecedor:

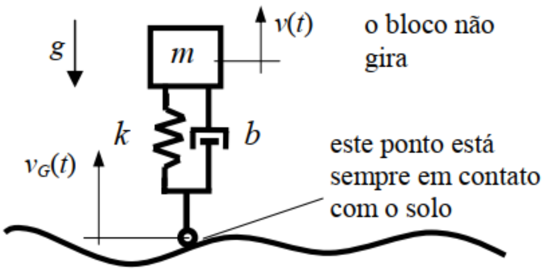


Figura 1 – Sistema massa mola amortecedor a ser estudado

com entrada a velocidade vertical da via, pode-se simular a resposta no *Scilab* com o seguinte código:

```
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;b=10;k=900;
// Definindo os polinomios da funcao de transferencia:
// Numerador:
n=(-m)*poly(0,'s','roots');
// Denominador
d=poly([k b m],'s','coef'); //observe a ordem contraria dos coeficientes
// Montando a funcao de transferencia, onde o parametro 'c' indica sistema
    de
// tempo continuo. Se for um sistema de tempo discreto, use o parametro 'd
    '.
G=syslin('c',n/d)
// Simulando o sistema para uma entrada degrau (u=0 para t<0 e u=1 para t
    >0):
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// Definindo o vetor de condicoes iniciais:
// O sistema é de segunda ordem, logo sao duas condicoes iniciais.
// Não definindo as condicoes iniciais o programa assume como sendo nulas.
x0=[0;0]; // x(0) = 0 e a derivada de x(t) no instante inicial tambem eh
    nula.
// Realizando a simulacao com o comando csim:
[y]=csim(u,t,G,x0);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
```

```
// Mostrando o resultado da simulacao:
xset('thickness',2)
xset('font size',4)
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
```

e obter a seguinte resposta:

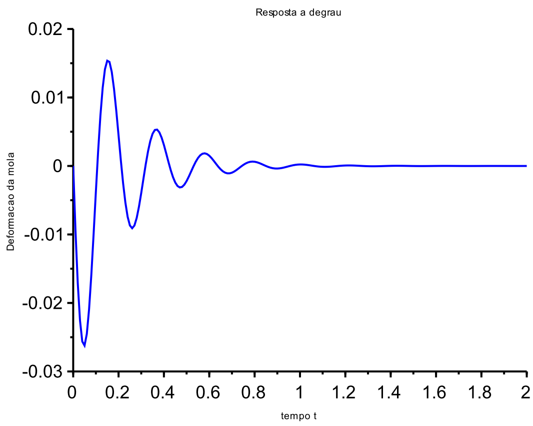


Figura 2 – Resposta do sistema

2 O sistema

Analisaremos aqui o sistema da figura 3, um bloco de massa m, com uma mola de coeficiente de elasticidade k e amortecedor viscoso de intensidade b.

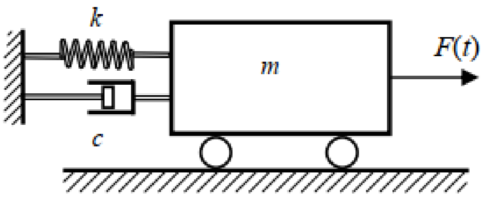


Figura 3 – Sistema a ser estudado

Tomando como coordenada o deslocamento horizontal da mola, o teorema do movimento do baricentro fica:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t) \tag{2.1}$$

Adotando como variáveis de estado $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, e $X = [x_1, x_2]^T$ podemos reescrever esse sistema como:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.2}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + f(t) \tag{2.3}$$

e na forma matricial:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t) \tag{2.4}$$

Para resolver o sistema, aplicamos a transformada de Laplace nas equações 2.2 e 2.3.

$$\mathcal{L}_1 : \; sX_1 = X_2 \tag{2.5}$$

$$\mathcal{L}_2 : \; sX_2 = -\frac{k}{m}X_1 - \frac{b}{m}X_2 + \frac{F}{m} \tag{2.6}$$

queremos a saída $Y = X_1$, resolvendo o sistema para X_1, obtemos:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \tag{2.7}$$

Simulando a equação 2.7 e 2.3, no *Scilab*, obtemos os mesmo resultados. Em todos os casos, a excitação do sistema foi devido a um degrau unitário.

2.1 Resultados

Foram simulados três casos, com $\zeta = 0,5$, $\zeta = 1$, $\zeta = 2$. Em todos os casos, comparou-se o a integração pela transformada e pelo tempo. Os parâmetros utilizados foram $k = 10N/m$, $m = 1$, e $b = 2\zeta\sqrt{km}$.

2.1.1 $\zeta = 0,5$

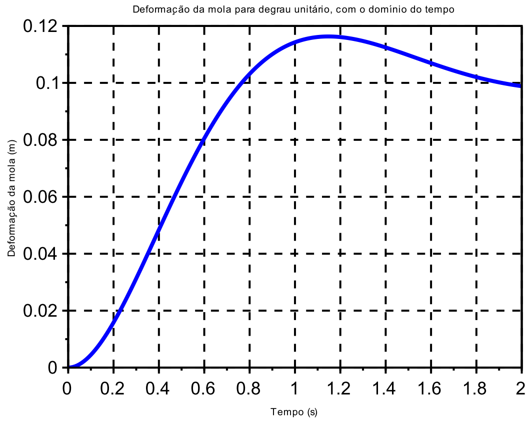


Figura 4 – Resultado para $\zeta = 0,5$ no tempo

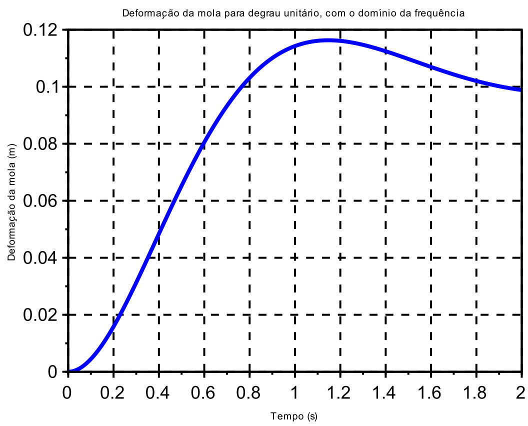


Figura 5 – Resultado para $\zeta = 0,5$ com a transformada de Laplace

2.1.2 $\zeta = 1$

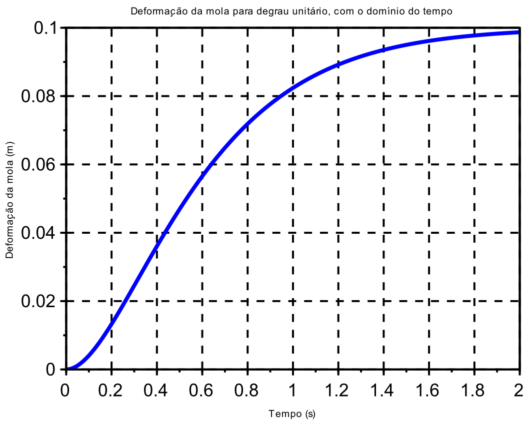


Figura 6 – Resultado para $\zeta = 1$ no tempo

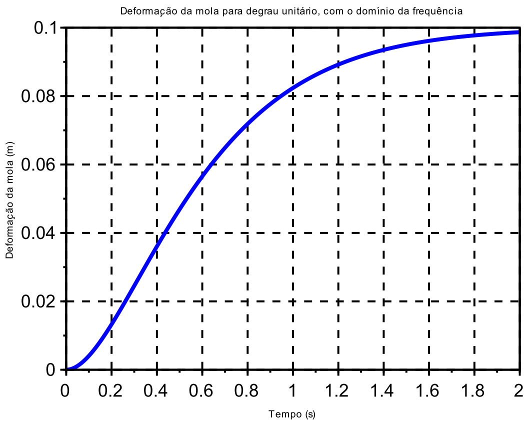


Figura 7 – Resultado para $\zeta = 1$ com a transformada de Laplace

2.1.3 $\zeta = 2$

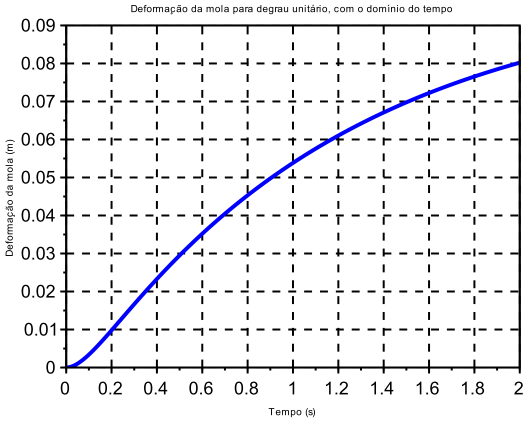


Figura 8 – Resultado para $\zeta = 2$ no tempo

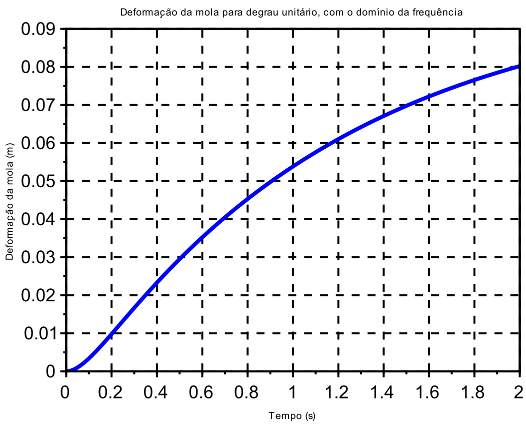


Figura 9 – Resultado para $\zeta = 2$ com a transformada de Laplace

2.2 Análise dos resultados

Com as simulações realizadas, foi possível extrairmos as raízes do denominador da transformada de Laplace na equação 2.7, e, também os autovalores da matriz A, da equação 2.

ζ	Raízes do denominador	Autovalores da matriz A
0,5	-1,5811+2,7386i	-1,5811+2,7386i
	-1,5811-2,7386i	-1,5811-2,7386i
1	-3,1623+3,799E-8i	-3,1623
	-3,1623-3,799E-8i	-3,1623
2	-11,8018	-11,8018
	0,8473	0,8473

Tabela 1 – Valores dos autovalores da matriz A e raízes do denominador da função de transferência da transformada de Laplace

Como esperado, as raízes do denominador correspondem aos autovalores da matriz A.

$\sqrt{k/m}$	$\|Z\|$	$\|Re(Z)\|/\|Z\|$	$\|Im(Z)\|$
3,1623	3,1622	0,5000	2,7386
3,1623	3,1622	0,5000	2,7386

Tabela 2 – Valores para o caso em que $\zeta = 0,5$, em que Z são as raízes do denominador da função de transferência

Como esperado, a frequência natural é igual ao módulo do número complexo que representa os polos da função de transferência. O código do *Scilab* utilizado foi:

```
clc()
```

```
clear()
close

m=1;
k=10;
Bcrit = 2*sqrt(k*m);
x0 =[0;0]
Fa = [0.5 1 2];


t=0:0.01:2
u=ones(t)

for i=1:3
b=Bcrit*Fa(i);
results=[]
//Dominio do Tempo
funcprot(0)
function dy=derivada(t,y)
    dy(1)=y(2)
    dy(2)=(-k*y(1)-b*y(2)+u(t+1))/m
endfunction

z = ode(x0,0,t,derivada)


//scf(1)
//plot(t,z(1,:),'linewidth',4)
//xlabel("Tempo (s)")
//ylabel("Deformação da mola (m)")
//title("Deformação da mola para degrau unitário, com o domínio do tempo")
//xgrid(1)
//xset('thickness',2)
//xset('font size',4)

//Dominio da Frequencia
n=1;
d=poly([k b m],'s','coeff');

G=syslin('c',n/d)




[y]=csim(u,t,G,x0);


```

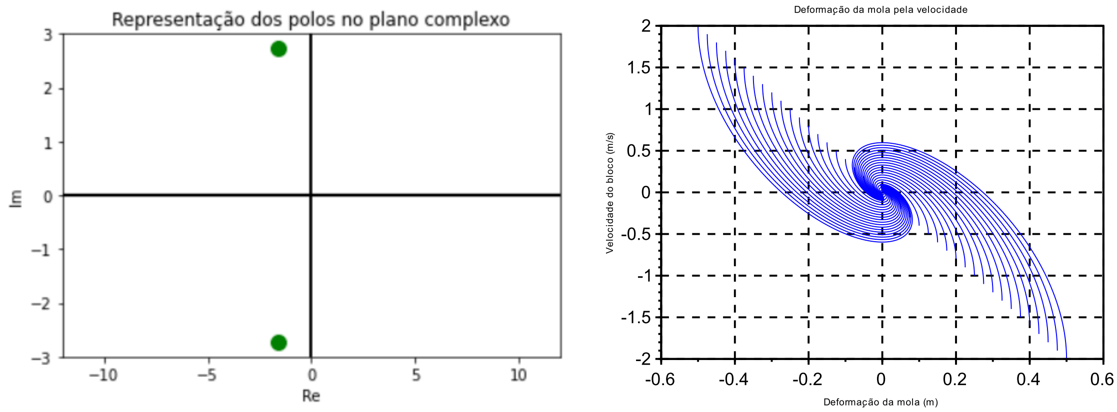
```
//scf(2)
//plot(t,y(1,:),'linewidth',4)
//xlabel("Tempo (s)")
//ylabel("Deformação da mola (m)")
//title("Deformação da mola para degrau unitário, com o domínio da frequê
    ncia")
//xgrid(1)
//xset('thickness',2)
//xset('font size',4)

A = [0 1;-k/m -b/m]

eg=spec(A)
r=roots(d)
egs(i,1)=eg(1)
egs(i,2)=eg(2)
rs(i,1)=r(1)
rs(i,2)=r(2)
Fas(i,1)=abs(real(eg(1)))/abs(eg(1))
Fas(i,2)=abs(real(eg(2)))/abs(eg(2))
Freqs(i,1)=abs(imag(eg(1)))
Freqs(i,2)=abs(imag(eg(2)))
end
```

2.3 Análise do Espaço de Estados

Podemos simular, com entrada nula, a resposta do sistema para diversas condições iniciais. Variando $x(t = 0)$ entre -2 e 2, com passo de 0,1m, obtemos os seguintes gráficos, também para $\zeta = 0, 5; 1; 2$.

2.3.1 $\zeta = 0,5$

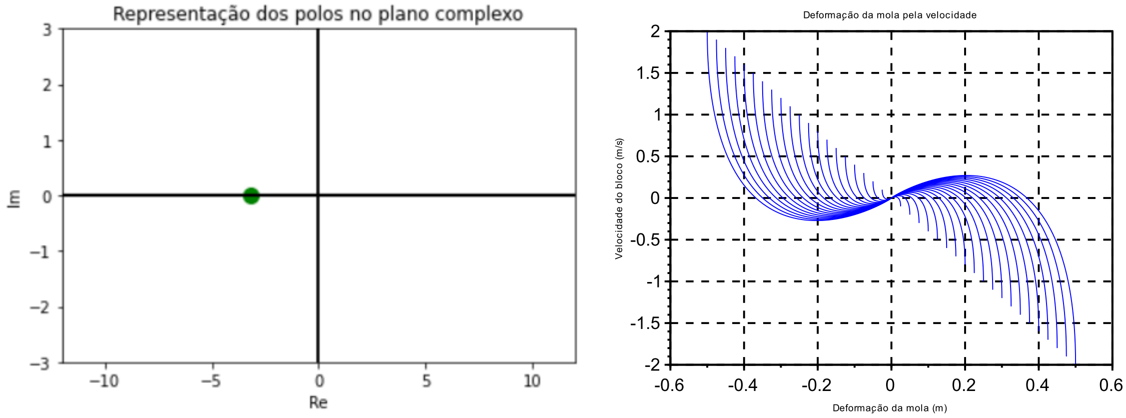
Figura 10 – Análise para polos complexos



(a) Polos complexos (b) Espaço por velocidade

2.3.2 $\zeta = 1$

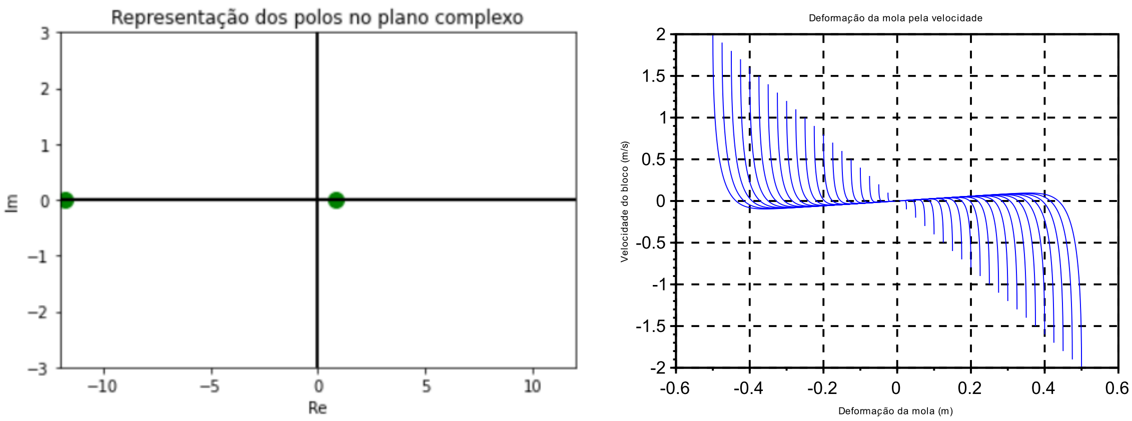
Figura 11 – Análise para polos reais e iguais



(a) Polos reais e iguais (b) Espaço por velocidade

2.3.3 $\zeta = 2$

Figura 12 – Análise para polos reais e distintos



(a) Polos reais e distintos

(b) Espaço por velocidade

O código do *Scilab* utilizado nessas simulações simulação foi:

```

clc()
clear()
close

m=1;
k=10;
Bcrit = 2*sqrt(k*m);

Fa = 2;


t=0:0.01:2
u=zeros(t)

b=Bcrit*Fa;
//Dominio da Frequencia
n=1;
d=poly([k b m],'s','coeff');

G=syslin('c',n/d)


n1=poly(0,'s','roots')
d1=poly([k b m],'s','coeff');

G1=syslin('c',n1/d1)
```

```
x01a=-2:0.1:2
for i=1:length(x01a)
    x01=x01a(i)
    x02=0
    x0=[x01;x02]
    [v]=csim(u,t,G1,x0);
    [y]=csim(u,t,G,x0);
    scf(2)
    plot(y,v,'linewidth',1)
    xlabel("Deformação da mola (m)")
    ylabel("Velocidade do bloco (m/s)")
    title("Deformação da mola pela velocidade")
    xgrid(1)
    xset('thickness',2)
    xset('font size',4)
end
```

e, para a confecção dos gráficos, do Python:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Data for plotting
t = np.array([-1.5811,-1.5811,-3.1623,-3.1623,-11.8018,0.8473])
s = np.array([2.7386,-2.7386,0,0,0,0])

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t[2:4],s[2:4],'go',ms=10)

ax.set(xlabel='Re', ylabel='Im',
       title='Representação dos polos no plano complexo')


ax.set_xlim(-12, 12)
ax.set_ylim(-3, 3)
ax.plot([-12,12],[0,0],lw=2,color='black')
ax.plot([0,0],[-3,3],lw=2,color='black')
```