Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Modelagem de sistemas dinâmicos

Lista E

Vítor Facchini
10772605

Professor: Décio Crisol e Agenor Fleury

São Paulo
2020

Sumário

Lista de Figuras

1 Equacionamento

A equação 1.1 é a equação diferencial que rege o comportamento do sistema, ilustrado na Figura 1.1.

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{F(t)}{m}, \; x \text{ é a deformação da mola} \tag{1.1}$$

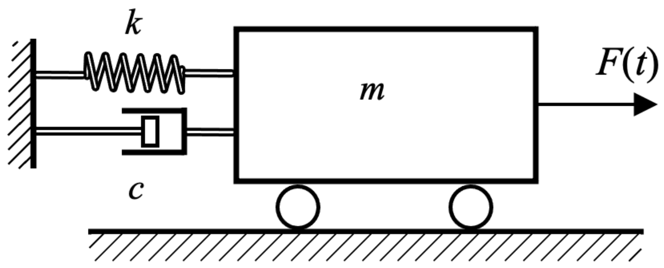

Figura 1.1: Sistema estudado

Para a simulação do sistema será adotado o vetor de estados da Equação 1.2 e a equação linear matricial está apresentada na Equação 1.3

$$Z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) \tag{1.3}$$

Obteve-se também a função de transferência do sistema (Equação 1.4), calculada para condições iniciais iguais a zero.

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{1.4}$$

Para as simulações feitas nas seções seguintes, foram adotados os seguintes valores:

- $m = 1\,kg$;
- b foi variado durante as simulações;
- $k = 900\,N/m$;
- $F = 1\,N$;
- $\zeta = \dfrac{b}{2\sqrt{km}}$

2 Simulações

2.1 $\zeta < 1$

Para essa simulação considerou-se $b = 10\,Ns/m$ e obteve-se os resultados ilustrados na Figura 2.1

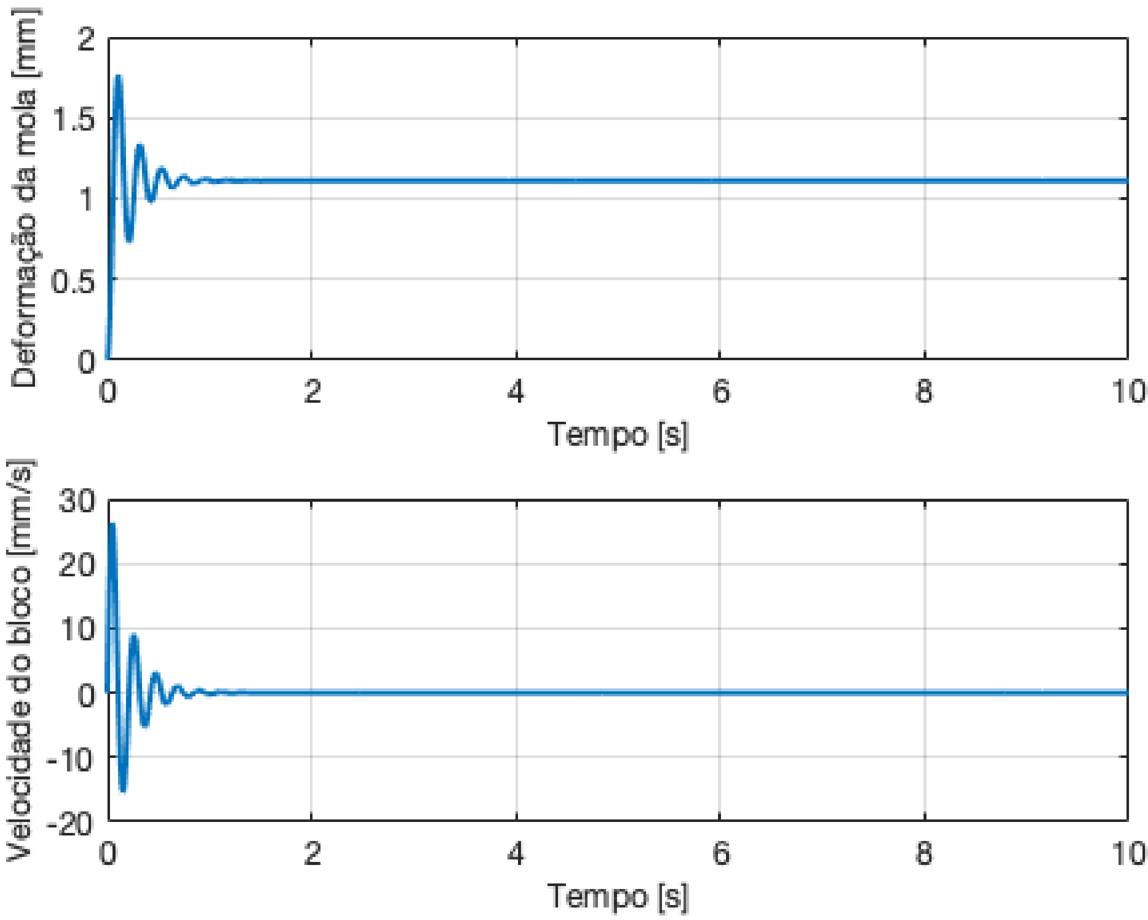

Figura 2.1: Variáveis de estado para $\zeta < 1$

Verifica-se que para este caso o sistema oscila rapidamente até atingir um ponto que entra em repouso.

2.2 $\zeta = 1$

Para essa simulação considerou-se $b = 60\, Ns/m$ e obteve-se os resultados ilustrados na Figura 2.2

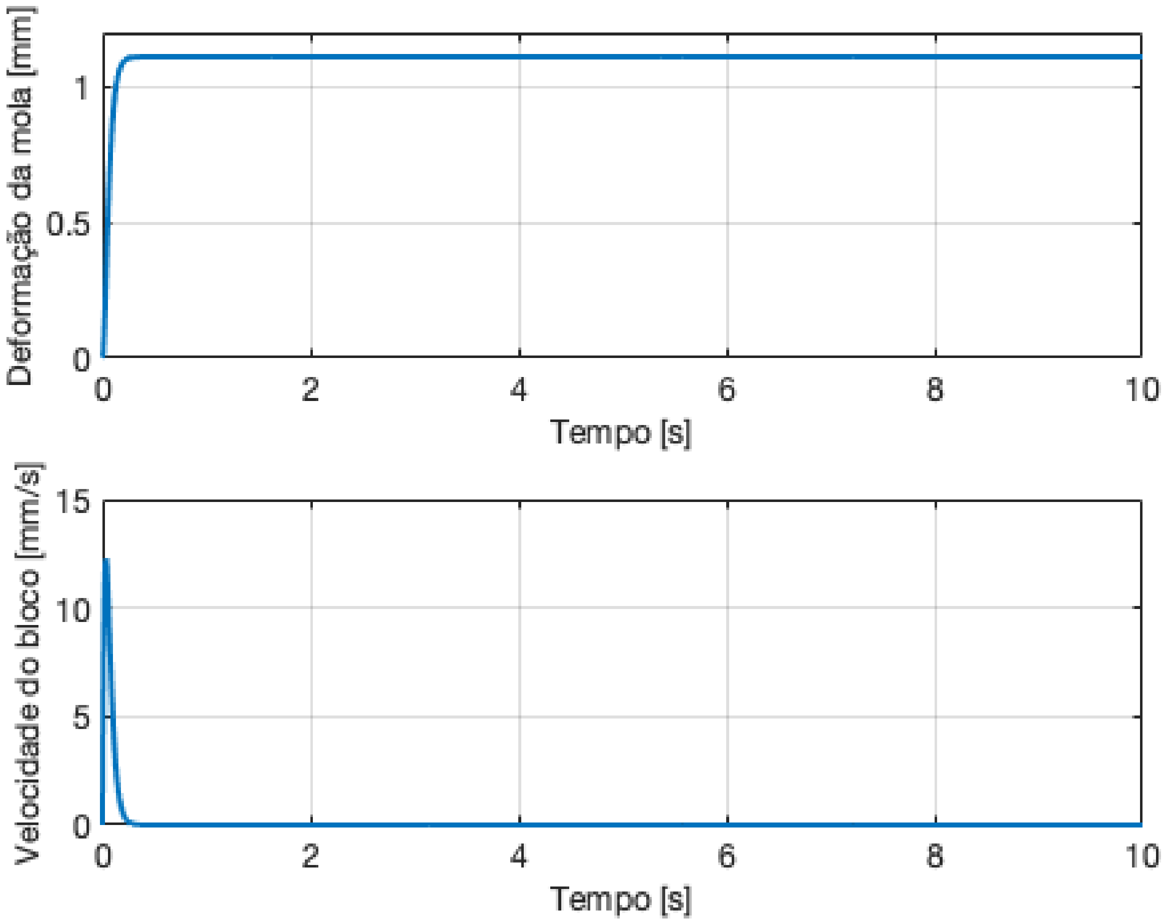

Figura 2.2: Variáveis de estado para $\zeta = 1$

Neste caso, o sistema não oscila e atinge a posição de repouso quase que instantaneamente após sofrer a perturbação

2.3 $\zeta > 1$

Para essa simulação considerou-se $b = 100\, Ns/m$ e obteve-se os resultados ilustrados na Figura 2.3

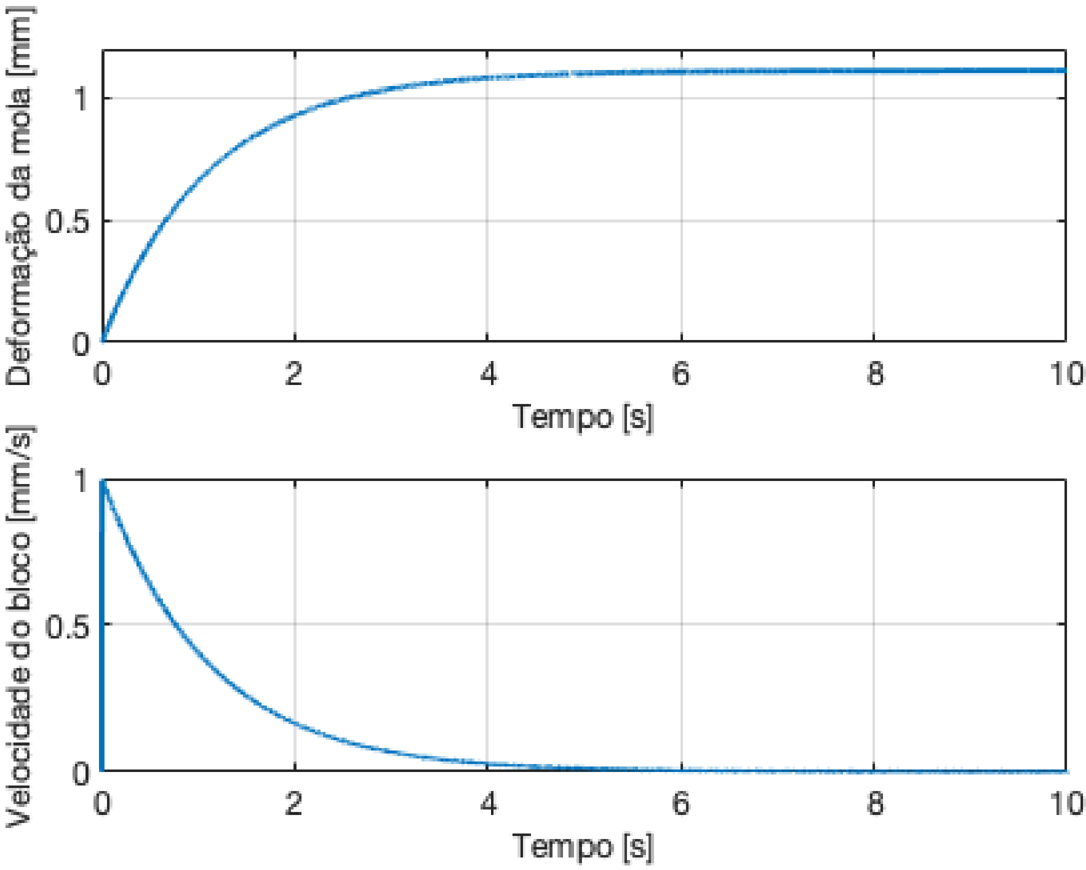

Figura 2.3: Variáveis de estado para $\zeta > 1$

Observa-se que nesta situação, o sistema também não oscila, entretanto demora muito mais que o caso $\zeta = 1$ para entrar em repouso.

3 Estudo do sistema

Inicialmente defini-se A como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Para encontrar os autovalores de A, fazemos:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

$$0 = \frac{k}{m} + \lambda \left(\frac{c}{m} + \lambda \right) = m\lambda^2 + c\lambda + k \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3 + 9\sqrt{11}i \\ \lambda_2 = -3 - 9\sqrt{11}i \end{cases} \tag{3.4}$$

Verifica-se que as raízes do polinômio da Equação 3.2 são as mesmas do polinômio $G(s)$, dadas as mesmas condições iniciais e $\zeta < 1$.

Cálcula-se, então o polo e a frequência natural do sistema. Verifica-se que tem o mesmo valor do módulo dos autovalores da matriz A.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 30\, rad/s = |\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 \tag{3.5}$$

O coeficiente de amortecimento pode ser obtido de acordo com a Equação 3.6.

$$\frac{\mathbb{R}(\lambda_1)}{|\lambda_1|} = \frac{\mathbb{R}(\lambda_2)}{|\lambda_2|} = 0,1 = \zeta \tag{3.6}$$

A frequência de oscilação pode ser obtida com o módulo da parte imaginária do polo (Equação 3.7).

$$|\mathbb{I}(\lambda_1)| = |\mathbb{I}(\lambda_2)| = 9\sqrt{11} \approx 29,8496\, rad/s \tag{3.7}$$

4 Simulações para diferentes cenários

Para as simulações a seguir manteve-se os seguintes parâmetros:

- $m = 1\,kg$;
- $k = 900\,N/m$;
- $F = 1\,N$;
- $\zeta = \dfrac{b}{2\sqrt{km}}$

b foi variado para alterar o valor de ζ.

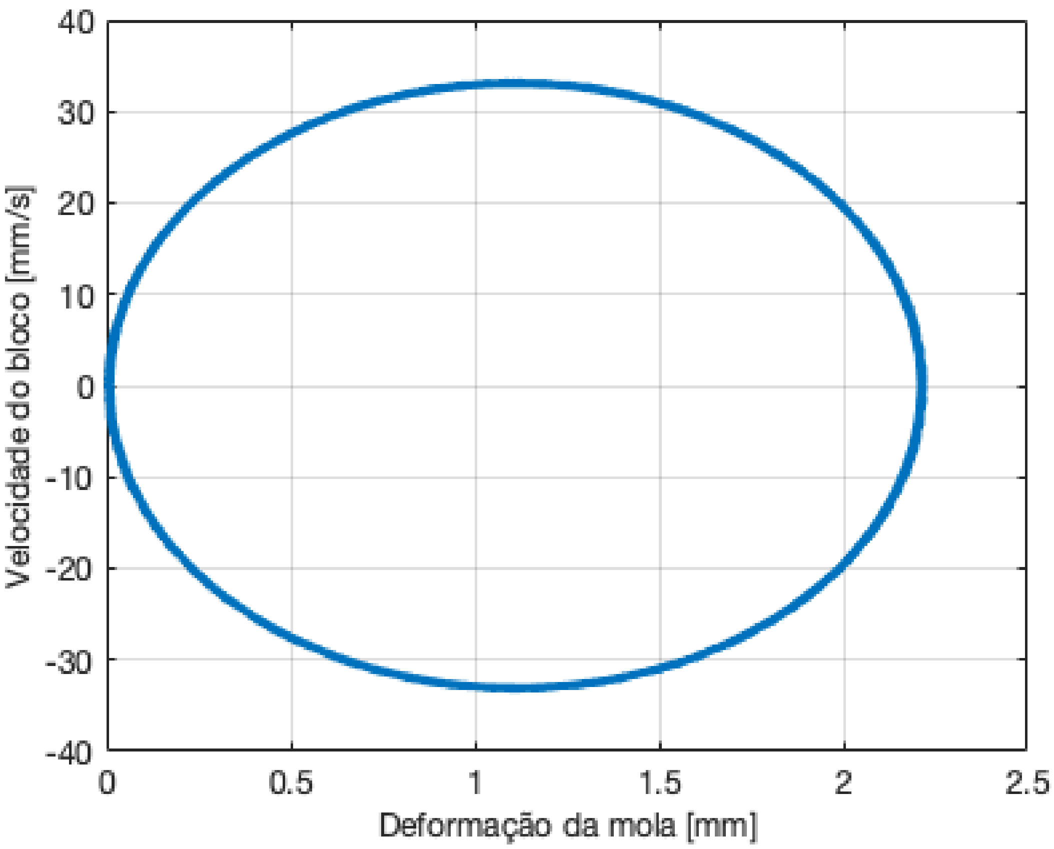

Figura 4.1: Gráficao de $\dot{x}$ por x para $b = 0\,Ns/m$

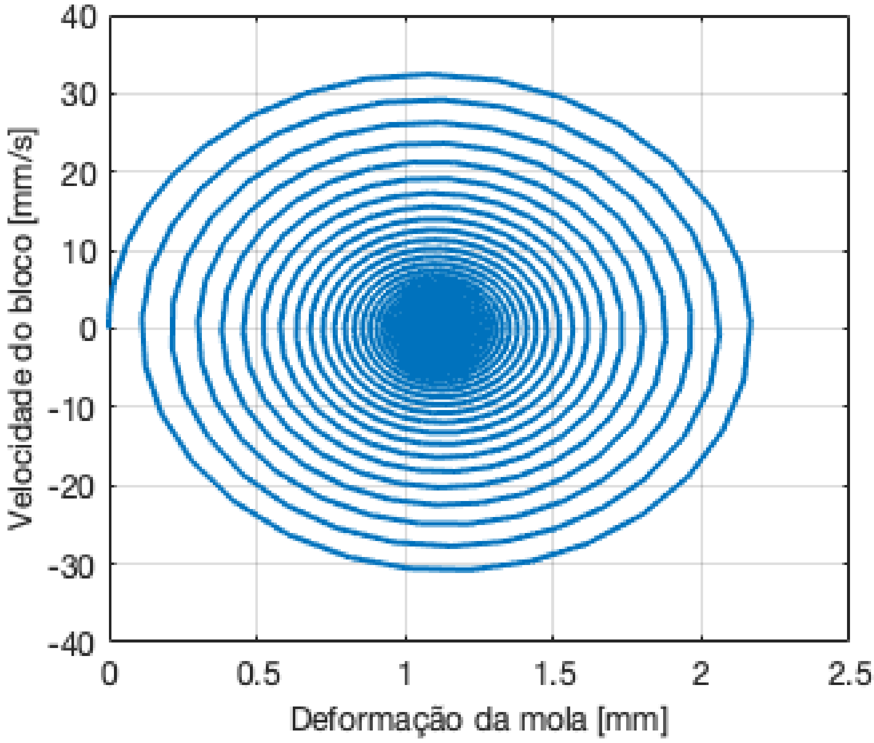

Figura 4.2: Gráficao de $\dot{x}$ por x para $b = 1\, Ns/m$

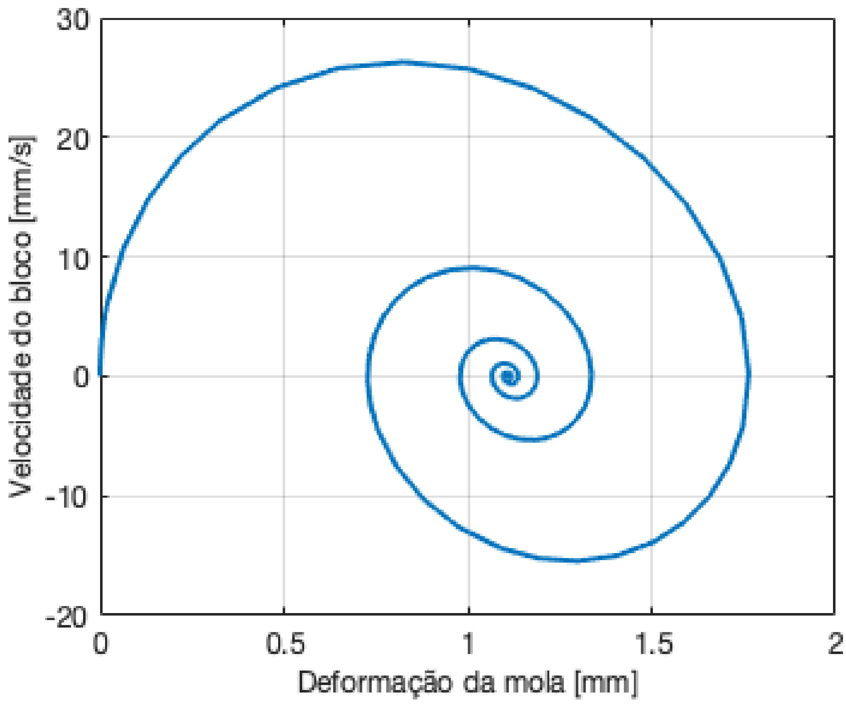

Figura 4.3: Gráficao de $\dot{x}$ por x para $b = 10\, Ns/m$

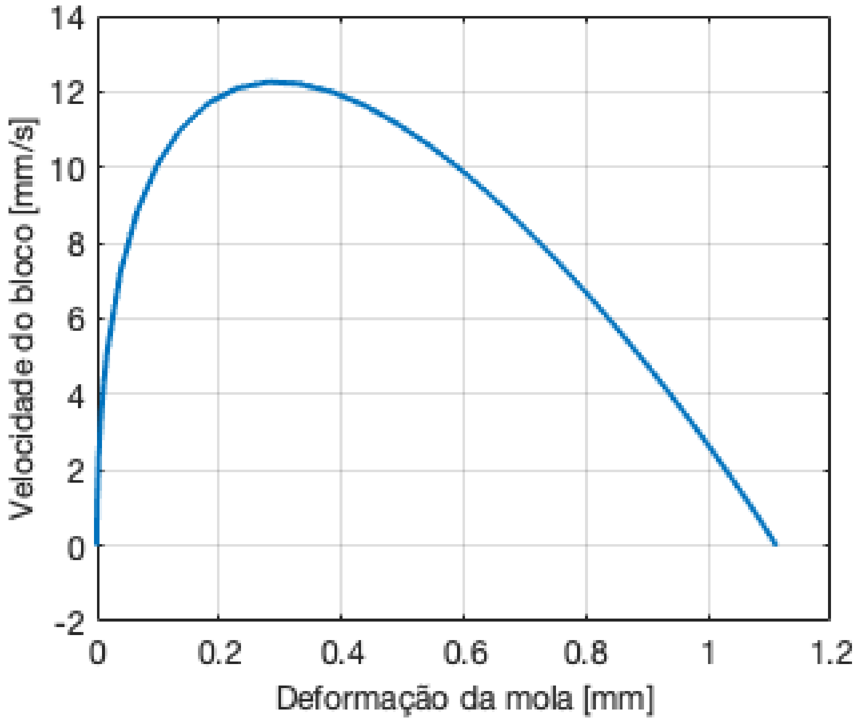

Figura 4.4: Gráficao de $\dot{x}$ por x para $b = 60\,Ns/m$

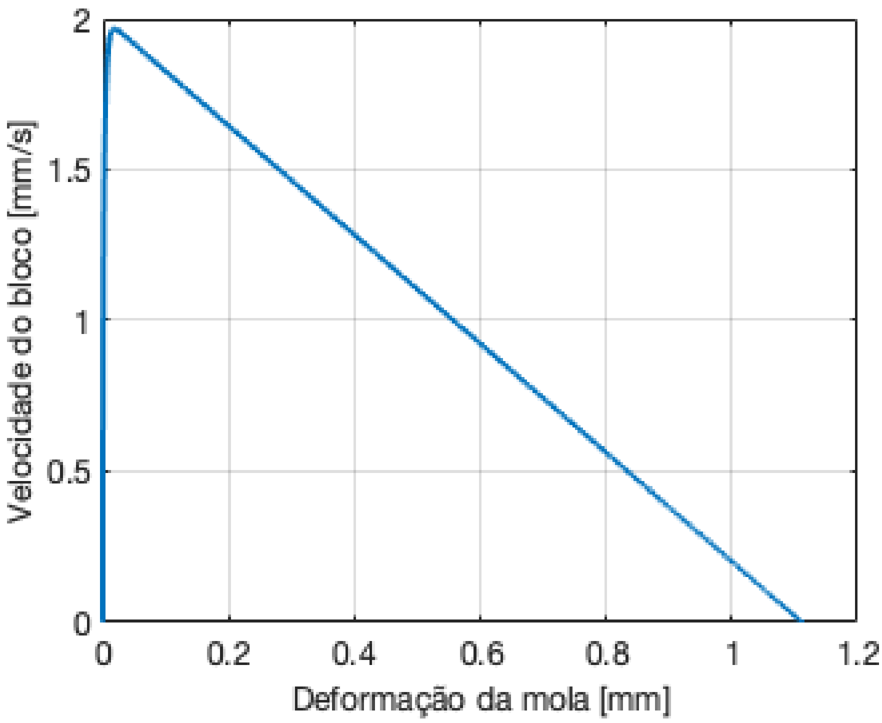

Figura 4.5: Gráficao de $\dot{x}$ por x para $b = 500\,Ns/m$

5 Código utilizado

Para a elaboração das simulações e gráficos foi utilizado o seguinte código:

```
function numericoE
close all
tempo = [0 10];
y0 = [0 0]';

%% Integracao
fun = @(t,y) odefun(t,y);% f(t,y)=yp (equacao diferencial)
[t,y]=ode45(fun,tempo,y0);

h1 = y(:,1); %variavel de estado 1
h2 = y(:,2); %variavel de estado 2

tempo=t;
%% Plots
subplot(2,1,1)
plot(tempo,h1*1000,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Deformacao da mola [mm]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(tempo,h2*1000,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Velocidade do bloco [mm/s]')
grid on

figure(1)
plot(h1*1000,h2*1000,'LineWidth',2)
xlabel('Deformacao da mola [mm]')
ylabel('Velocidade do bloco [mm/s]')
grid on

end
function yp = odefun(t,y)
k=900;
c=500;
m=1;
A=[0 1;-k/m -c/m];
B=[0;1/m];
F=1;
yp = A*y+B*F;
end
```