

Bases da Mecânica Quântica

Experimento V - Difração de Elétrons

Nome: Lucas Cass Bedra Zemi

nº USP: 10732169

09/10/2020

Resumo:

O experimento aqui descrito estuda a Difração de elétrons, onde usa ondas de matéria, utilizando uma fonte de elétrons e um pórculo de grafite para a formação de fenômeno de difração. Além disso, verificou-se a exatidão e precisão de métodos matemática e gráfica para a determinação do espaçamento interatômico, previamente desconhecido, atingindo resultados satisfatoriamente exatos e precisos.

Introdução:

Louis de Broglie propôs, em 1924, o conceito de "onda matéria", que dita que o comportamento de ondas eletromagnéticas também pode ser aplicada a matéria. Isso é, partículas materiais, como o elétron, poderiam estar exibindo características ondulatórias, de mesma modo que o fóton apresenta propriedades de matéria.

Em sua tese, um comprimento de onda de de Broglie ( $\lambda_{de\ Broglie}$ ) pode ser associado a um feixe de partículas materiais, não-relativísticas e não-energéticas, de modo que é dado pelo inverso de seu momento.

$$\lambda_{de\ Broglie} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Equação 1: Comprimento de onda de de Broglie

\* Onde, h é a cte de Planck e p é o momento

A partir do proposto de de Broglie, seria possível observar efeitos de difração para um feixe de elétrons quando estes atravessarem uma grade colati-



namente fina, compensada as tumbas do feixe.

A comprovaçao teórica acontece, em 1927, quando Davisson e Germer observaram a difração de um feixe de elétrons, quando estes eram incididos sobre um cristal de Ni. Além disso, G. P. Thomson observou o mesmo fenômeno por meio de fendas finas de metal logo, observando os padrões de difração de elétrons que atravessam uma rede de carbono é possível obter o espaçamento interatômico dos átomos de carbono ou qualquer outro material em questão.

Desta forma, o objetivo do presente experimento/relatório é estudar a difração de elétrons e relacioná-la com a difração de fótons e, também, determinar o espaçamento interatômico dos átomos presentes.

**Materiais e Métodos:**

Neste experimento foi utilizada um tubo (TEL-2555), que através de um cátodo aquecido em um bulbo evacuado produz um feixe de elétrons. No bulbo, o feixe é direcionado por uma grade composta por uma fina camada de cristais de grafite (carbono), assim, o feixe será difratado, sendo que este efeito é possível observar no tubo frequentemente nas superfícies externas de um bulbo (é visto dois e mais).

O tubo foi conectado a uma fonte DC de alta tensão. Foi aplicado diferentes voltagens com um intervalo de 2,5 KV a 4KV, em passos de 0,5KV, de forma que era possível observar os variações padrões formados no bulbo. Além disso, foi anotado os diâmetros das circunferências presentes no bulbo (externas e internas). Com estas valores confeccionou-se gráficos relacionando o diâmetro com a tensão em que era aplicada. Desta forma, foi possível determinar o espaçamento dos planos interatômicos dos cristais de grafite.

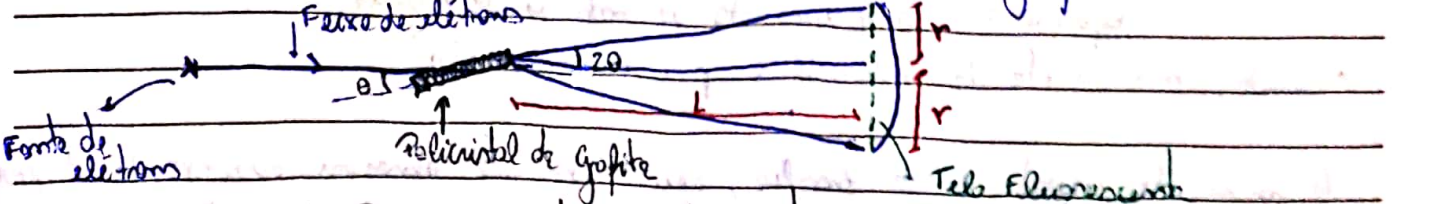


Figura 1: Diagrama do procedimento experimental.



Resultados e Discussões:

Medindo a distância do alvo de carbono até a tela luminescente, obtemos um valor equivalente a:

$$L = (0,130 \pm 0,001) \text{ m}$$

A tabela abaixo mostra os valores de diâmetro menor e maior para cada tensão aplicada:

Tabela 1: Valores de tensão aplicada no anodo para, conseqüentemente, obter os valores de diâmetro menor e maior

Tensão da Fonte (kV)			Diâmetro menor (mm)			Diâmetro maior (mm)			Distância Carbono-Tela (mm)		
4,00	±	0,01	25,00	±	0,05	44,28	±	0,05	130	±	1
3,50	±	0,01	24,85	±	0,05	45,35	±	0,05	130	±	1
3,00	±	0,01	28,10	±	0,05	48,40	±	0,05	130	±	1
2,50	±	0,01	30,85	±	0,05	54,85	±	0,05	130	±	1

→ Obtemos, agora, uma equação que correlaciona o  $\lambda$  do elétron com função do tensão de aceleração dos elétrons:

O comprimento de onda de de Broglie é dado pela equação 1

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Para um elétron, a lei de conservação de energia requer que toda variação de energia cinética acrescentada de variação de energia potencial elétrica entre dois pontos seja igual a zero, pois não há trabalho realizado sobre o sistema por forças externas

$$\left( \frac{m v_f^2}{2} - \frac{m v_i^2}{2} \right) + (e V_f - e V_i) = 0$$

data  
fecha

D S T Q Q S S  
D L M M J V S

Como o elétron parte do repouso, a energia cinética inicial e a energia potencial elétrica inicial são zero

$$\frac{mv^2}{2} = eV$$

Isolando a velocidade:

$$v^2 = \frac{2eV}{m}$$

Substituindo a expressão acima da velocidade na equação 1, obtemos:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emV}}$$

Equação 2: Equação que relaciona  $\lambda$  elétron com tensão

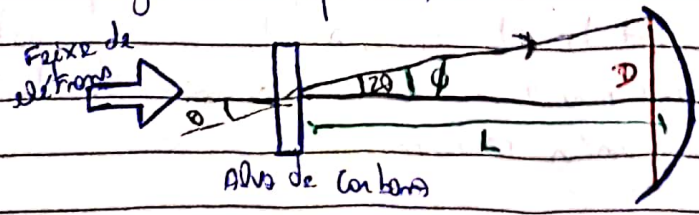
\* Calculando os valores das cte acima, temos:

$$\lambda = (1,228 \cdot 10^{-9}) \cdot V^{-1/2}$$

→ Agora, obteremos uma expressão para o diâmetro das anéis de difração formados em função da tensão de aceleração dos elétrons

\* Expressaremos a equação de forma limpa:

temos o seguinte esquema,



\* Consideramos,

pequeno ângulo  $\rightarrow \text{sen } \phi \approx \text{tg } \phi \approx \phi$

Sendo que,

$$\phi = 2\theta \rightarrow \theta = \frac{\phi}{2}$$

Sobemos que,

$$\phi = \frac{D/2}{L}$$

Ou seja,

$$\phi = \frac{D/2}{L} = 2\theta$$

→ Pela eq. de Bragg

$$m\lambda = 2d \sin\theta$$

Equação 3: lei de Bragg

\* Como, já sabemos:

$$\sin\theta \approx \theta$$

Logo,

$$\lambda = 2d \cdot \theta, \quad \text{p/ } m=1 \text{ e } \theta = \frac{\phi}{2}$$

$$\lambda = 2d \cdot \frac{\phi}{2}$$

$$\lambda = d \cdot \phi$$

$$\lambda = d \cdot \frac{D/2}{L}$$

Então,

$$\lambda = \frac{d \cdot D}{2L} \quad (A)$$



data  
fecha

D S T Q Q S S  
D L M M J V S

→ ? da equação 2, temos:

$$\lambda = h = \frac{(1,23 \cdot 10^{-9}) V_f^{-1/2}}{\sqrt{2emV_f}}$$

Substituindo na equação A, obtemos:

$$D = \frac{(1,23 \cdot 10^{-9}) \cdot 2L \cdot V_f^{-1/2}}{d}$$

Equação 4: Expressão que correlaciona os Diâmetros dos anéis c/ a tensão de aceleração dos elétrons

→ Fazendo uma comparação da equação 4 com uma equação linear  $y = ax$ , temos:

$$D = \frac{(1,23 \cdot 10^{-9}) \cdot 2L}{d} \cdot V_f^{-1/2}$$
$$y = a \cdot x$$

logo,

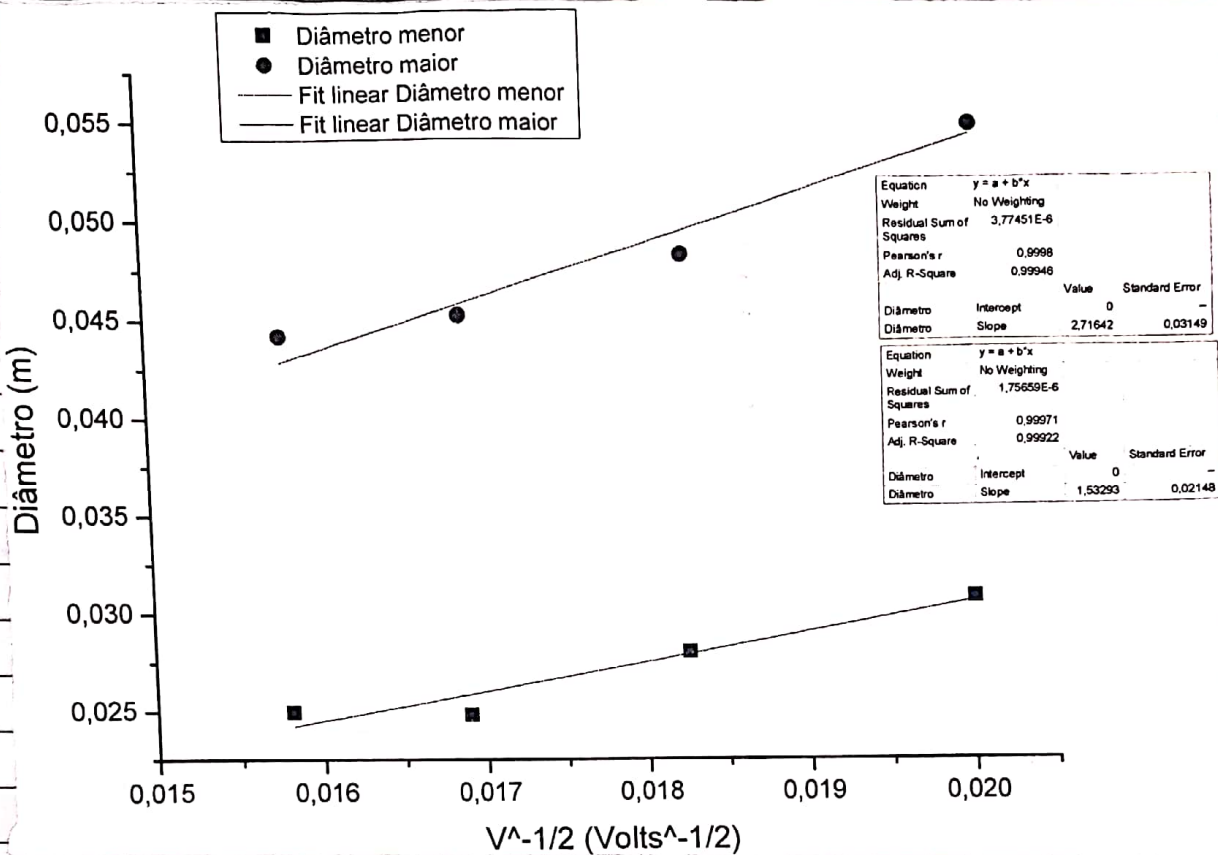
\*  $D = y$

\*  $\frac{(1,23 \cdot 10^{-9}) \cdot 2L}{d} = a$

\*  $V_f^{-1/2} = x$

→ Com os dados de tabela 1 foi construído um gráfico dos Diâmetros x (tensão de aceleração dos elétrons)<sup>-1/2</sup>. O gráfico foi ajustado com base em uma equação linear, utilizando a relação entre a equação 4 e uma equação linear. Por meio deste ajuste foi possível determinar o espaçamento interatômico experimental.

Gráfico 1: Diâmetros x  $(t_{\text{mem}})^{-1/2}$ , com ajuste linear



→ Da regressão linear obtêm-se os seguintes valores experimentais para os experimentos interstômicos. Além disso, comparamos com o valor teórico.

\* Regressão linear, coeficiente angular obtido  
 $a_{\text{maior}} = (2,716 \pm 0,031)$   
 $a_{\text{menor}} = (1,533 \pm 0,021)$

→ Calculando o valor de  $d$  (experimentos interstômicos), obtém-se

$d_{\text{maior}} = (2,078 \pm 0,004) \text{ \AA}$   
 $d_{\text{menor}} = (1,171 \pm 0,002) \text{ \AA}$

obtemos fórmula do comprimento de  $d$

$$d = \sqrt{\left(\frac{(1,228 \cdot 10^{-9}) \cdot 2,62}{a}\right)^2 + \left(\frac{-1,228 \cdot 10^{-9} \cdot 2,2 \cdot \sigma_a}{a^2}\right)^2}$$



data  
fecha

OSOTOS  
DLMMJJVS

No tabela 2 comparamos com os valores teóricos  
tabela 2: Valores obtidos a partir do regressão linear de gráficos da  
gráfica 1 e seus respectivos valores teóricos

	Experimento [Å]	Teoria [Å]
$d_{menor}$	$1,171 \pm 0,002$	1,23
$d_{maior}$	$2,078 \pm 0,004$	2,13

Assim, nota-se um erro percentual de:

$$d_{menor} : 4,79\%$$

$$d_{maior} : 2,44\%$$

Logo, podemos atestar que o método funciona, pois os valores experimentais  
são muito próximos dos valores teóricos

→ Outra análise que podemos fazer:

\* Observa-se que a proporção dos  $d$ :

$$\frac{d_{maior}}{d_{menor}} \approx 1,76 \text{ (Experimental)}$$

O que sugere que os átomos de carbono são mais parecido com  
um arranjo hexagonal do que com um arranjo cúbico

→ Valor esperado para um arranjo hexagonal

$$\frac{d_{maior}}{d_{menor}} = 1,73 = \sqrt{3}$$

\* Erro percentual, em relação ao valor experimental, de:

$$\text{Erro percentual} = 1,73\%$$

→ Abaixo um esquema do possível arranjo dos átomos de carbono

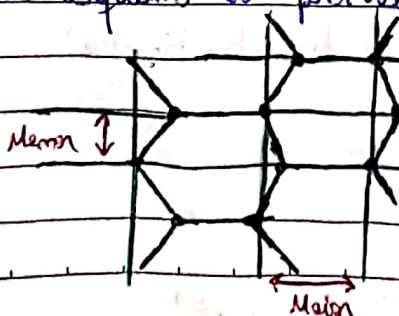


Figura 2: Possível arranjo dos átomos de carbono



Questões:

11- Na experimentos de espalhamento temos partículas muito pequenas. Da equação 1, temos que o comprimento de onda é inversamente proporcional ao momento, fazendo com que esses experimentos necessitem de um alto valor de tensão. Sendo assim, o efeito relativístico não interfere.

12- Já respondido esta questão, porém respondendo novamente:

A grafite consiste em camadas bidimensionais unidas a outras camadas bidimensionais paralelas, e dentro de cada folha, os átomos são arranjados em uma estrutura hexagonal, sendo possível observar que a distância entre os planos deve se repetir exatamente. O cristal de grafite não é cúbico, usando isso apenas como uma estimativa  
 [Electron Diffraction Experiment]

\* Como já mostrado na relativística, não entre os d

$d_{\text{meas}} = 1,76$   
 $d_{\text{meas}}$

$d_{\text{teórica}} = 1,73$   
 $d_{\text{teórica}}$

(Experimental)

(teórica / arranjo Hexagonal)

⇒ muito próximo ⇒ Erro percentual = 1,73%

13- Os parâmetros de rede de célula unitária não são responsáveis pela formação de padrões de difração observada, mas sim os planos atômicos. Bragg observou que um feixe refletido poderia ser explicado pela grande número dos planos paralelos entre os átomos. Veremos na figura abaixo que um raio refletido de um plano adjacente viaja uma distância  $\Delta s = 2d \sin \theta$  [Foto anterior sobre a difração de elétrons]

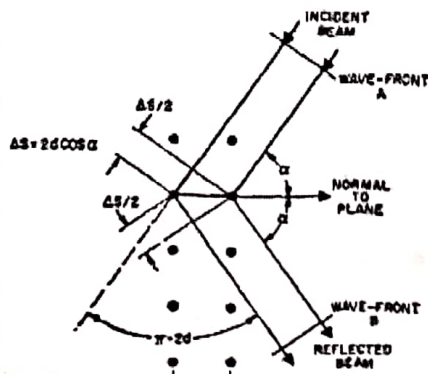
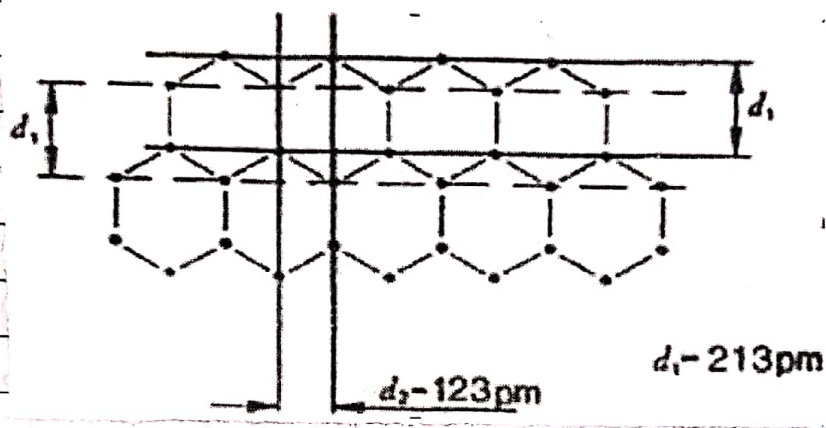


Figura 3: Planos atômicos com os feixes incidentes e refletidos

14 - Os dois anéis observados não correspondem a dois planos intersticiais diferentes, se devessem à reflexão nos planos do rede com espaçamentos  $d_1$  e  $d_2$ , por  $n \neq 1$ , sendo os sub-índices 1 e 2 referentes ao primeiro e segundo anéis mais próximos:



\* Complementar  
 no Apêndice A

Figura 4: Planos do cristal de grafite para os dois primeiros anéis.

Podendo ser verificada também com os resultados experimentais, em que cada diâmetro apresenta um espaçamento distinto, caso a plano fosse o mesmo, eles seriam iguais e não seriam dois anéis.

15 - Os padrões formados por feixes passando por diferentes fendas, podem ser visto abaixo:

→ Fenda Simples:

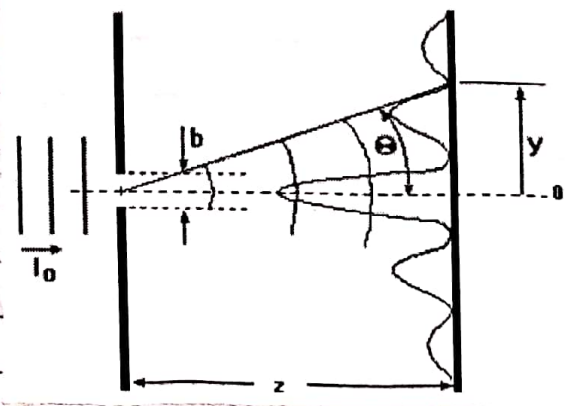


Figura 5: Padrões os pontos por uma fenda simples



data  
fecha

D	S	T	Q	Q	S	S
D	L	M	M	J	V	S

→ Fenda Dupla:

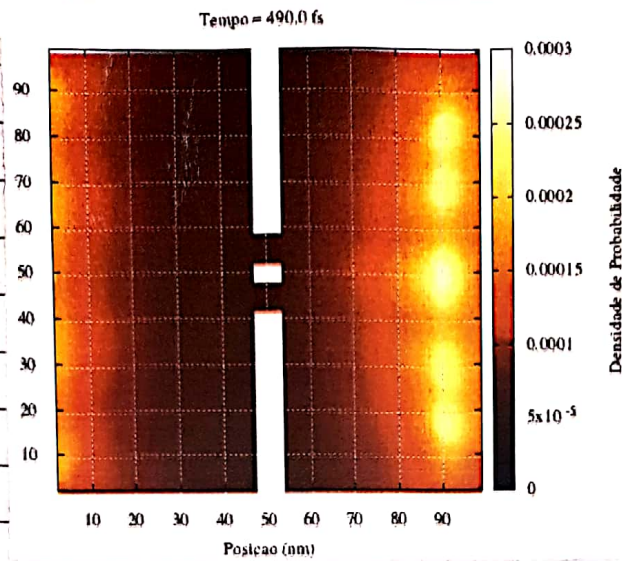


Figura 6: Padrão de probabilidade para uma fenda dupla

→ Rede de Rombeos:

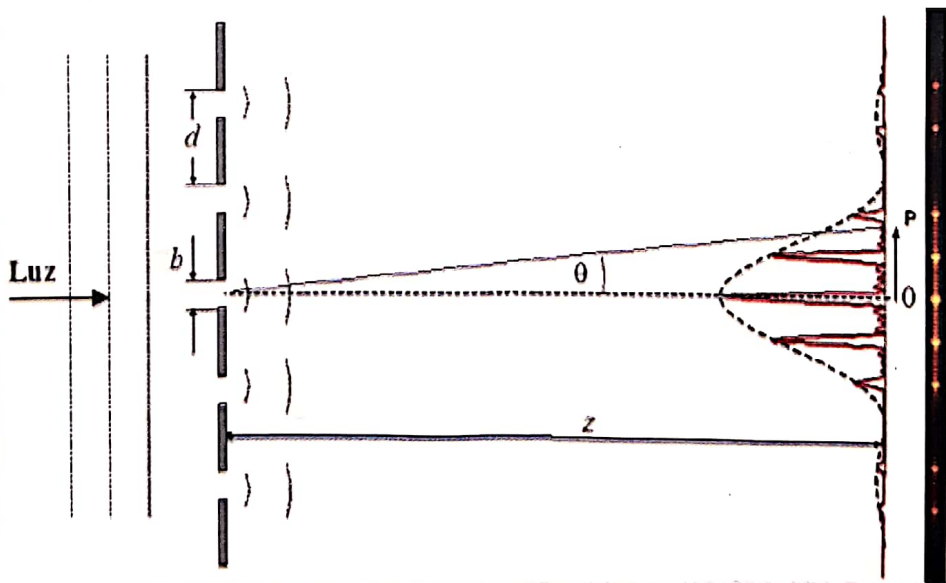


Figura 7: Padrão de probabilidade para uma rede de rombeos

→ Rede de Rombeos igualmente espaçados

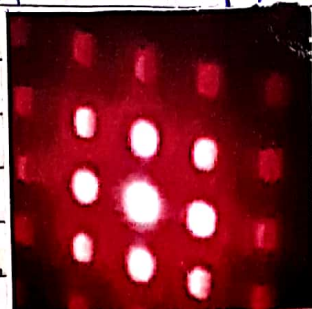


Figura 8: Padrão quadrado de probabilidade para uma rede de rombeos igualmente espaçados

17- Analisando a seguinte figura:

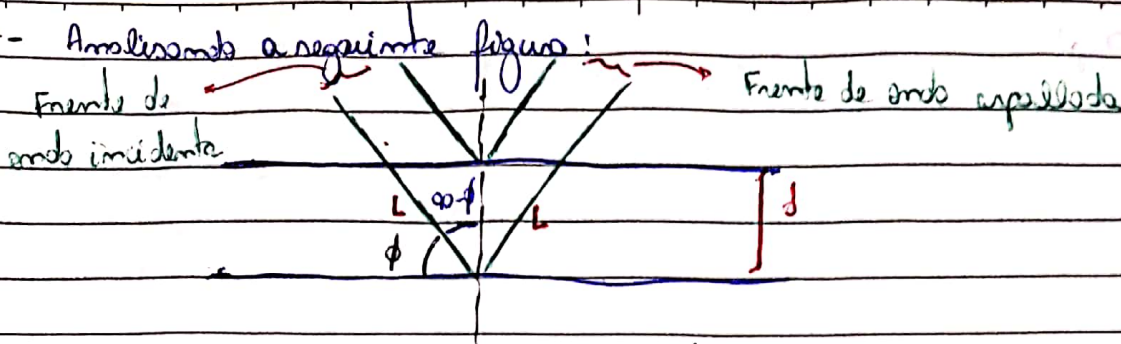


Figura 9: Derivação da relação de Bragg, mostrando apenas dois planos atômicos e dois raios das feixes incidente e espalhada.

Logo, se um número inteiro de comprimentos de onda  $m\lambda$  se ajusta exatamente na distância  $2L$  entre os frentes de onda incidente e espalhada medido sobre o raio inferior, então a contribuição dos dois raios para a frente de onda espalhada estará em fase, e um máximo de difração será obtido para o ângulo  $\phi$ . [Eisberg - Física Quântica]

Como,

$$L/d = \cos(90^\circ - \phi) = \text{sen}\phi$$

temos então,

$$2L = 2d \text{sen}\phi$$

E então, obtemos a relação de Bragg

$$m\lambda = 2d \text{sen}\phi \rightarrow \text{Relação de Bragg}$$

\* O máximo de difração de "primeira ordem" ( $m=1$ ) é normalmente o mais intenso

18- Em fendas simples ou duplas o padrão de raios ocorre, pois a onda ao sofrer difração sofre também interferência de modo que, os raios luminosos onde ocorrem uma interferência construtiva e os escuros onde a fenômeno em questão é destrutivo. Para raios circulares ocorre o mesmo, porém menos comum pois que a onda para propagar por estas fendas, ela muda seu formato, de maneira que a difração passa a apresentar um padrão circular.

(Complemento parte do círculo circular - Apêndice A)



data  
fecha

• •  
D S T Q Q S S  
D L M M J V S

### Conclusões:

À partir dos resultados obtidos, e comparando-os com valores teóricos para cada variável, concluímos que a método é bastante exato e preciso, observando a proximidade dos resultados e as incertezas. Mesmo que alguns dos valores não se encontrem nos mesmos intervalos determinados para as incertezas, os valores podem ser considerados corretos por serem muito próximos. Portanto os objetivos de calcular o espaçamento interatômico do grafite e estudar o fenômeno de difração de elétrons, bem como, verificar a confiabilidade do método de análise matemática e gráfica, foram atingidos de forma satisfatória.

### Referências:

- 1 - Eisberg, "Física Quântica"
- 2 - Tipler, "Modern Physics"
- 3 - "Capítulo 3: Estruturas cristalinas e geometria dos cristais"
- 4 - "Electron Diffraction tube"
- 5 - "Electron Diffraction Experiment"
- 6 - "Fatos históricos sobre a difração de elétrons"
- 7 - "Difração de elétrons"; IFSC
- 8 - "Difração"; UFRGS - IF

data  
 fecha

D	S	T	Q	Q	S	S
D	L	M	M	J	V	S

Apêndice A: Começo das partes emendas

(Polovna) = representa em relatórios, onde sua conexão está no apêndice A

Questão 11:

\* Fazendo os cálculos,

$$K = \frac{1}{2} m v_p^2; \quad K = e V_p$$

$$e V_p = \frac{1}{2} m v_p^2$$

$$v_p^2 = \frac{2 e V_p}{m}$$

$$v_p^2 = 1,4 \cdot 10^{15} \Rightarrow v_p = 3,74 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$E = 8,25 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

$v_p$  comparada a  $c$  (vel da luz) é pequena. Logo os efeitos relativísticos podem ser desprezados

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Questão 14: (Complemento)

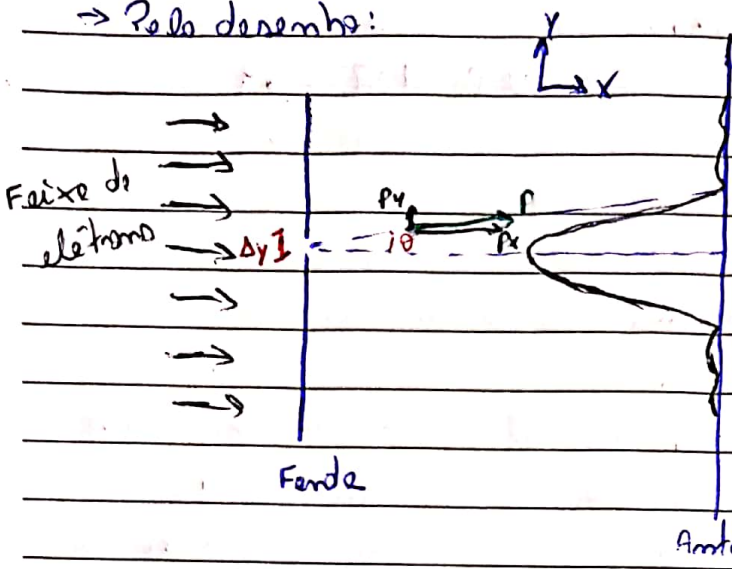
Nota-se que a deposição ocorre em diferentes planos de rede juntas, porém devido ao estreitamento dos linhas paralelos é difícil enxergar a terceira ordem e assim por diante. Logo as ordens surgirem através de diferentes difrações no mesmo plano, variam-se várias ordens consecutivas com facilidade

Assim, para enxergar mais as ordens de diferentes planos seria necessário uma tela perpendicular mais.



Questão 16:

→ Pelo desenho:



$$\Delta p_y \approx p_y = p \sin \theta = \frac{p \lambda}{\Delta y}$$

Usando a relação de de Broglie  $p = h/\lambda$  para relacionar o momento da partícula com o  $\lambda$ , obtemos

$$\Delta p_y = h/\Delta y$$

ou

$$\Delta p_y \Delta y = h$$

\* O resultado está de acordo com o princípio da incerteza. A difração que se refere a ondas, e o princípio da incerteza, que se refere a partículas, fornecem maneiras alternativas, porém equivalentes de se tratar este e todos os problemas similares.

Questão 18: (Complemento parte do eufício circular)

No rede policristalina, os cristais são orientados de forma aleatória. Em geral, grãos são preparados para obter tal resultado. Nesta condição, não existe conjunto de grãos orientados adequadamente para satisfazer a lei de Bragg para determinados conjuntos de ângulos. Desta forma não geramos sinais de difração