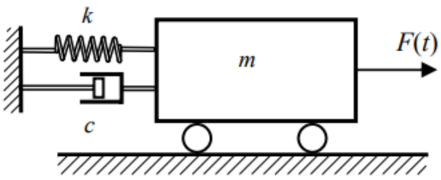
PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

LISTA E

Cássio Murakami Nº USP: 10773798

Exercício a)

Foi estudado o seguinte sistema massa-mola amortecedor a fim de obter evolução temporal da posição e da velocidade do carrinho.



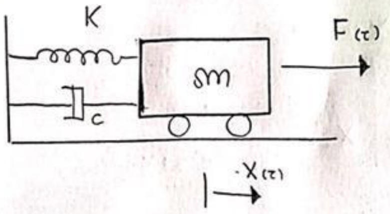
Na primeira parte da tarefa foi realizada a dedução da equação que rege o sistema a partir de duas abordagens diferentes. A primeira consistiu na montagem do vetor de estados e a obtenção dos autovalores correspondente a matriz dinâmica do sistema. A segunda consistiu na utilização da transformada de Laplace a fim de obter uma equação algébrica que representa o comportamento do sistema, sendo obtido a função de transferência.

A conclusão obtida é que, assim como esperado, os dois métodos levam a resultados idênticos, o qual é caraterizado principalmente pelos dos autovalores ou pela raiz do polinômio no denominador da função de transferência (Note que ambos são equivalentes). Os cenários de movimentação do sistema podem ser divididos em três, o primeiro é o caso de raízes complexas, o seguindo é o caso em que as duas raízes são reais e idênticas e o terceiro é o caso em que as duas raízes são reais e distintas.

Lista E

Cássia Murakami 10773798

1)



- Da TMB: $m\ddot{x} = F(t) - Kx - c\dot{x}$

- Escrevendo na forma de sistema diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F(t)$$

(I) Autovalores da matriz A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -K/m & -c/m - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \frac{c}{m}\lambda + \lambda^2 + \frac{K}{m} = 0$$

$$\lambda = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4 \cdot \frac{K}{m}}}{2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

(II) Função de transferência:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F(t)}{m} \end{array} \right. \xrightarrow{\mathcal{L}} \left| \begin{array}{l} sX_1 - x_1(0) = X_2 \\ sX_2 - x_2(0) = -\frac{K}{m}X_1 - \frac{c}{m}X_2 + \frac{F}{m} \end{array} \right.$$

$$X_2\left(s + \frac{c}{m}\right) = x_2(0) - \frac{K}{m}X_1 + \frac{F}{m} \rightarrow X_2 = \frac{m}{ms + c}\left(x_2(0) - \frac{K}{m}X_1 + \frac{F}{m}\right)$$

$$s\,X_1 - X_1(0) = \frac{1}{ms+c}\left(\frac{X_2(0)}{m} - kX_1 + F\right)$$

$$X_1\left(s + \frac{k}{ms+c}\right) = X_1(0) + \frac{X_2(0)}{m^2s+mc} + \frac{F}{ms+c}$$

• Considerando que $x(0)=0$ e $\dot{x}(0)=0$:

$$X_1 = \left(\frac{ms+c}{ms^2+cs+k}\right)\cdot\frac{F}{ms+c} \rightarrow X_1 = \frac{F}{ms^2+cs+k}$$

$$G = \frac{X_1}{F} \rightarrow G(s) = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$ (Função de transferência)

• Calculando as raízes da função de Transferência:

$$ms^2+cs+k=0 \rightarrow s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

* Note que os autovalores de A e as raízes do denominador da função de transferência são equivalentes.

• Observe que as soluções serão complexas se $c^2 - 4mk < 0 \rightarrow \frac{c}{2\sqrt{km}} < 1$.

* A frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor é obtida resolvendo a equação diferencial que rege o sistema (desconsiderando a forçante)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \rightarrow ms^2 + cs + k = 0 \rightarrow s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

$$x(t) = A \cdot e^{st}$$

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad c_c = 2\sqrt{km} \quad ; \quad \xi = \frac{c}{c_c}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left[A_1 e^{i\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t} + A_2 e^{-i\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t}\right]$$

• Pela fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, é possível transformar a solução em um produto entre uma exponencial decrescente e uma parcela trigonométrica.

• Note que a parcela trigonométrica terá uma frequência de $\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}$, que é:

$$\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot \sqrt{1-\frac{C^2}{4Km}} = \sqrt{\frac{K}{m}-\frac{C^2K}{4Km^2}} = \sqrt{\frac{4mK-C^2}{4m^2}} = Imag(s)$$

• Calculando o módulo das raízes:

$$|S| = \sqrt{\frac{C^2}{4m^2}+\frac{4mK-C^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega \text{ (frequência natural)}$$

$$\frac{\frac{C}{2m}}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = \frac{C}{2\sqrt{Km}} = \varepsilon \text{ (Coeficiente de amortecimento)}$$

Exercício b)

Obtido o vetor de estados que caracteriza o sistema foi elaborado uma rotina para a solução numérica do sistema diferencial.

A simulação contempla os primeiros 30 segundos desde a condição inicial imposta. Os valores numéricos para os parâmetros foram os seguintes : $m = 1\,kg$ e $k = 4\,N/m$, sendo os valores para o coeficiente de amortecimento estabelecidos para se atingir o cenário desejado.

Foram realizados 5 experimentos para cada cenário, com o seguinte conjunto de condições iniciais impostas ao sistema:

$x(0) = 1\,m\ e\ \dot{x}(0) = 1\,m/s$, (Vermelho)

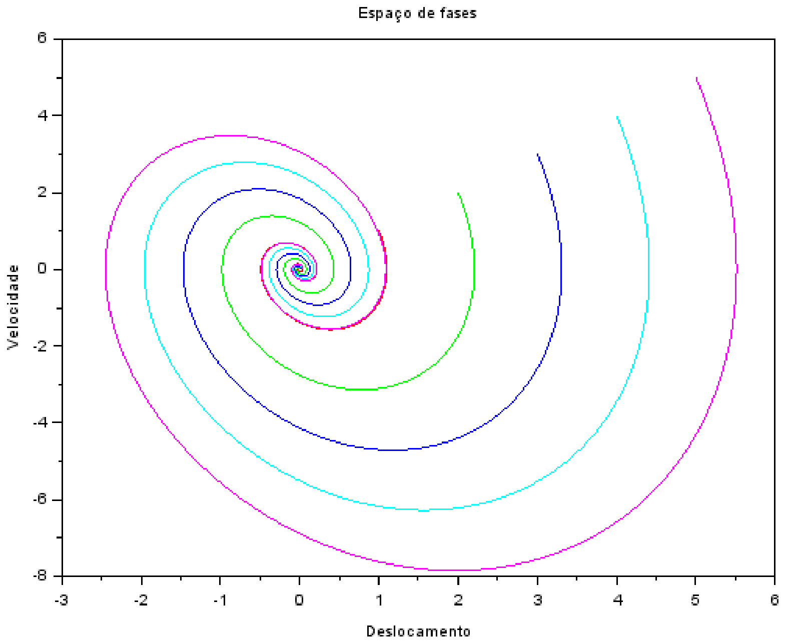
$x(0) = 2\,m\ e\ \dot{x}(0) = 2\,m/s$, (Verde)

$x(0) = 3\,m\ e\ \dot{x}(0) = 3\,m/s$, (Azul)

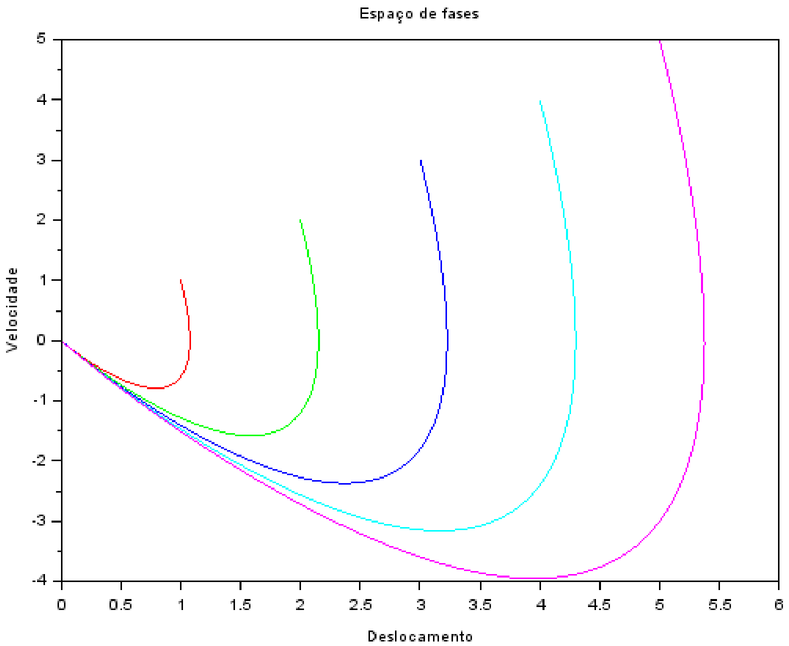
$x(0) = 4\,m\ e\ \dot{x}(0) = 4\,m/s$, (Ciano)

$x(0) = 5\,m\ e\ \dot{x}(0) = 5\,m/s$, (Rosa)

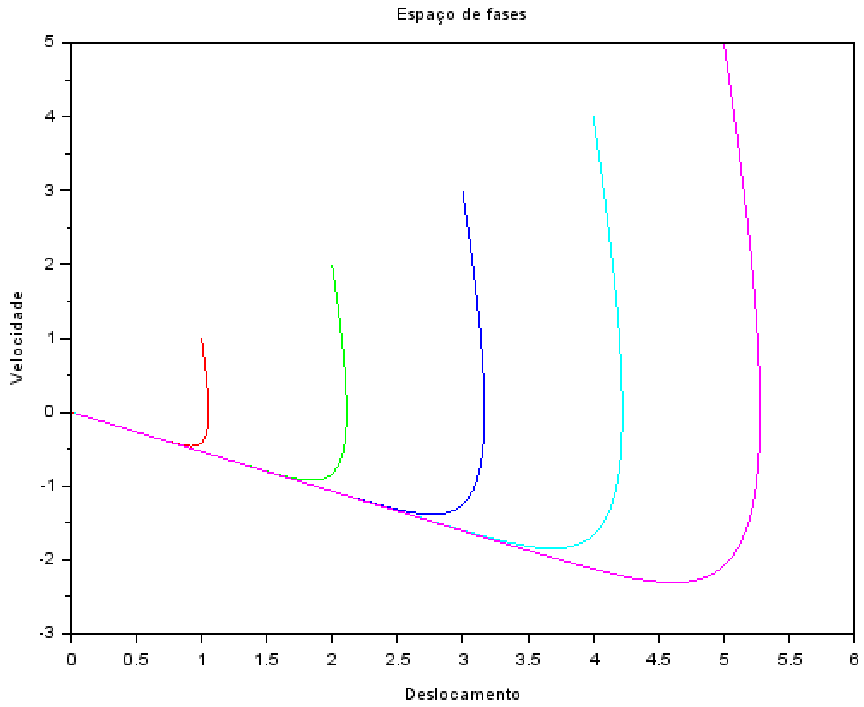
I. Duas raízes complexas (c = 1 N.s/m)



II. Duas raízes reais e idênticas (c = 4 N.s/m)



III. Duas raízes reais e distintas (c = 8 N.s/m)



Código elaborado no *Scilab* 6.1.0

```
clear();
winsid(xdel());
//Cássio Murakami   NºUSP: 10773798

//Estudo do sistema massa mola amortecedor:

//Tempo de simulação:
t_final = 10;
iteration = 1000;
t = linspace(0,t_final,iteration);

//Definição das constantes do sistema:
m = 1; //Massa do carrinho
k = 4; //Constante elástica da mola

//Definição do caso a ser estudado:
caso = 3;

if caso == 1 then
//Caso 1: Raízes complexas
  b = 1;

elseif caso == 2 then
//Caso 2: Raízes reais e coincidentes
  b = 4;

else
//Caso 3: Raízes reais e distintas
  b = 8;
end

//Condições iniciais do sistema:
x0 = [1 2 3 4 5];
xp0 = [1 2 3 4 5];

//Definição do vetor de estados:
funcprot(0)
  function dy=eq_diff(t, y)
    dy(1) = y(2);
    dy(2) = -(k/m)*y(1) - (b/m)*y(2);
  endfunction

//Solução da equação diferencial:
for i = 1:length(x0)
  solution = ode([x0(i);xp0(i)],0,t,eq_diff);

  for j = 1:length(t)
    x(i,j) = solution(1,j);
    xp(i,j) = solution(2,j);
```

```
    end
end

scf(1);
colors = ["r","g","b","c","m"];
xtitle("Espaço de fases");
xlabel("Deslocamento");
ylabel("Velocidade");
for i = 1:length(x0)
    plot(x(i,:),xp(i,:),colors(i));
end
```