Lista E

PME 3380 - Modelagem

Nathan Daleffi Rodrigues Rayes

10772585

Escola Politécnica

Universidade de São Paulo

São Paulo

2020

1 Simulação do sistema massa-mola

As equação diferencial que define o movimento do sistema apresentado está mostrada a seguir:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{F(t)}{m} \tag{1}$$

Adotando o espaço de estados $Z = \begin{bmatrix} x & \dot{x} \end{bmatrix}^T$, a seguinte equação linear matricial é apresentada:

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) \tag{3}$$

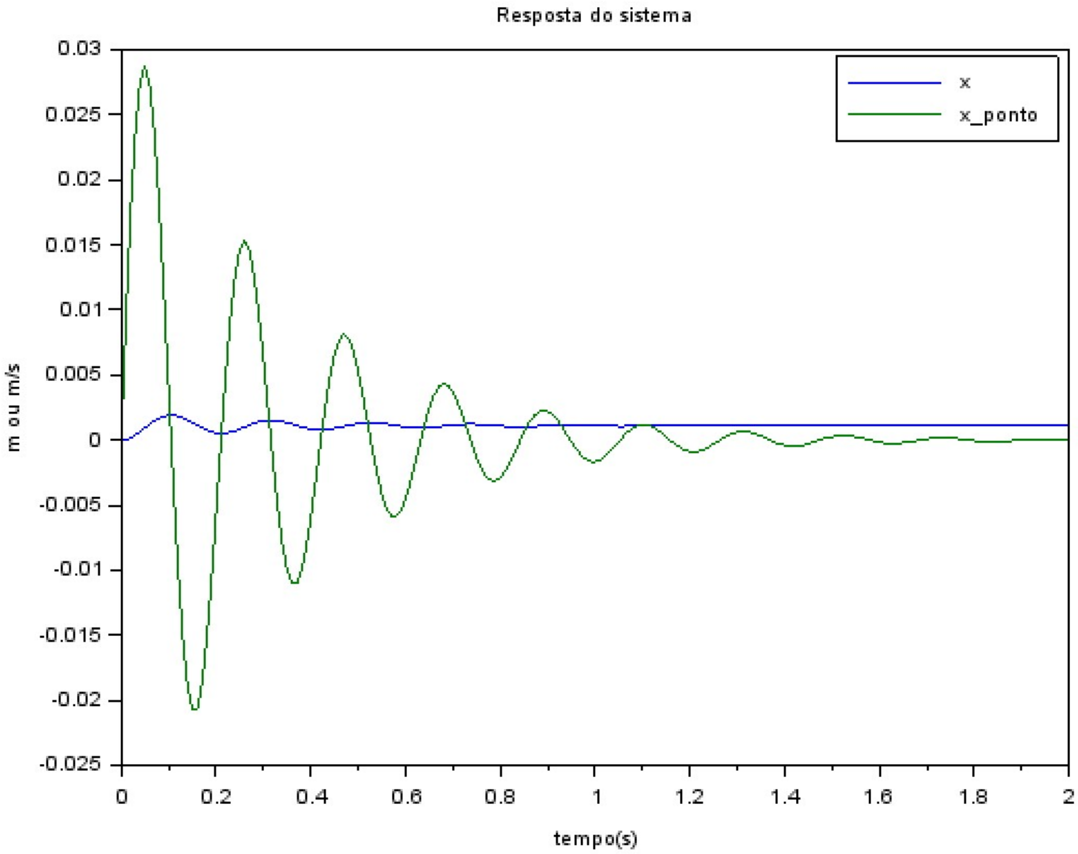
A função de transferência $G(s)$ foi calculada com condições iniciais nulas e teve o seguinte resultado:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{4}$$

A resposta desse sistema para diferentes valores de ζ estão mostrados a seguir, os parâmetros m e k são 1 Kg e 900 N/m respectivamente:

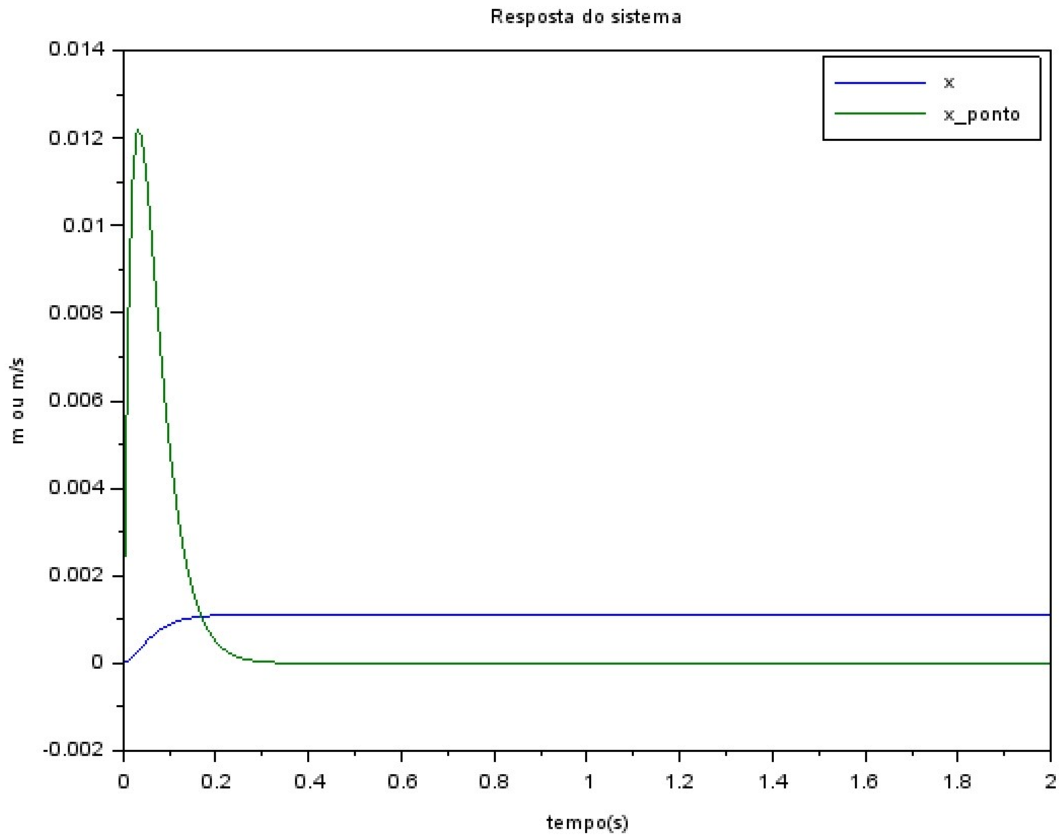
Para $\zeta = 0{,}1 < 1$:

Figura 1 – $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ para $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ com $\zeta = 0,1$



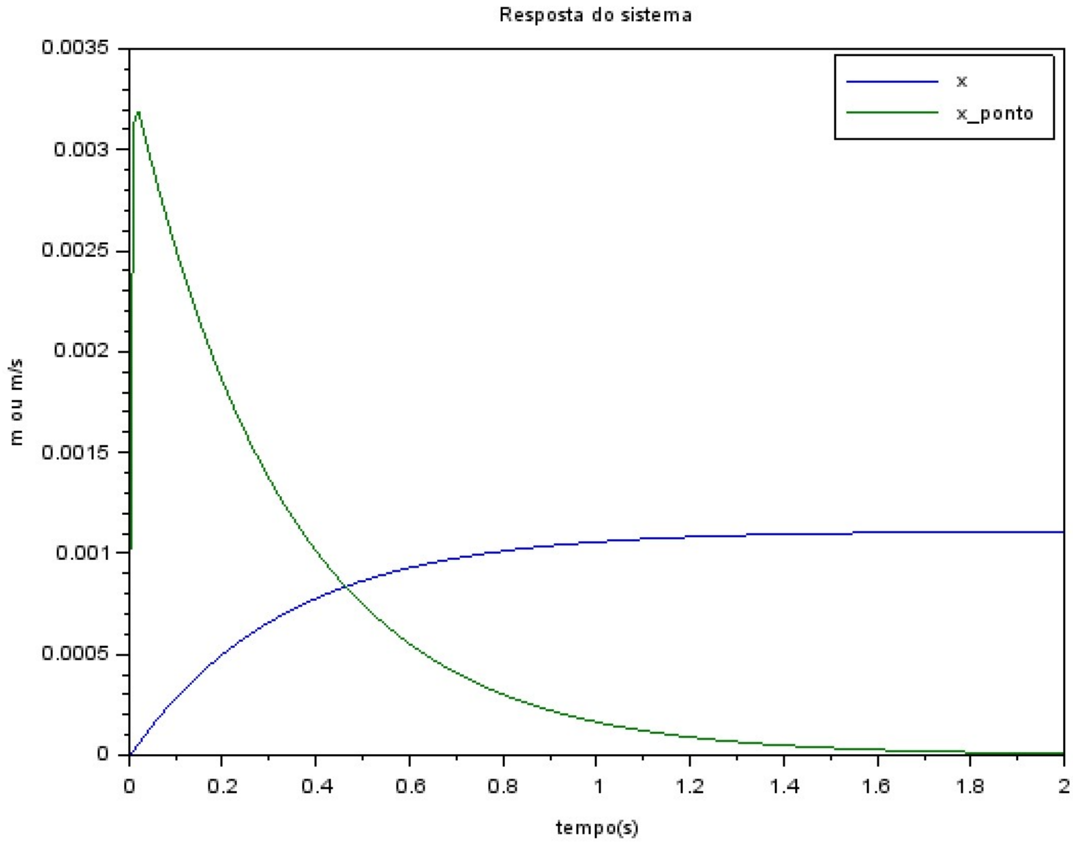
Para $\zeta = 1$:

Figura 2 – $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ para $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ com $\zeta = 1$



Para $\zeta = 5 > 1$:

Figura 3 – $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ para $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ com $\zeta = 5$



O código utilizado para a simulação acima é o seguinte:

```
clear all
m=1;;k=900;

Cc = 5;
c=2*Cc*sqrt(k*m);
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;1/m];
C=[0 0];
D=[0];

MassaMola=syslin('c',A,B,C,D);

t=0:0.01:2;

u=ones(2*t);

x0e=[0;0];

[y,x]=csim(u,t,MassaMola,x0e);

```

```
f1 = scf(1);
plot(t,x);
legend(["x","x_ponto"])
xtitle("Resposta do sistema", "tempo(s)" ,"m ou m/s");
```

2 Autovalores da matriz A e raízes do denominador de $G(s)$

Os autovalores da matriz A serão calculados a seguir:

$$det(A - tI_{2x2}) = 0 = \frac{k}{m} + t(\frac{c}{m} + t) = mt^2 + ct + k = 0 \tag{5}$$

Pode-se observar que as raízes do polinômio acima são as mesmas do polinômio $G(s)$ para dadas condições iniciais e os parâmetros m e k são 1 Kg e 900 N/m respectivamente, com $\zeta = 0.1 < 1$:

$$\begin{cases} t_1 = -3 + 9\sqrt{11}i \\ t_2 = -3 - 9\sqrt{11}i \end{cases} \tag{6}$$

Além disso é possível chegar nas seguintes conclusões:

1. o modulo do polo é igual a frequência natural do sistema massa-mola amortecedor:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{900}{1}} = 30rad/s \tag{7}$$

$$|t_i| = \sqrt{3^2 + (9\sqrt{11})^2} = 30 = \omega \tag{8}$$

2. dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento:

$$\frac{|Re(t_i)|}{|t_i|} = \frac{3}{30} = 0,1 = \zeta \tag{9}$$

3. a frequência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do polo:

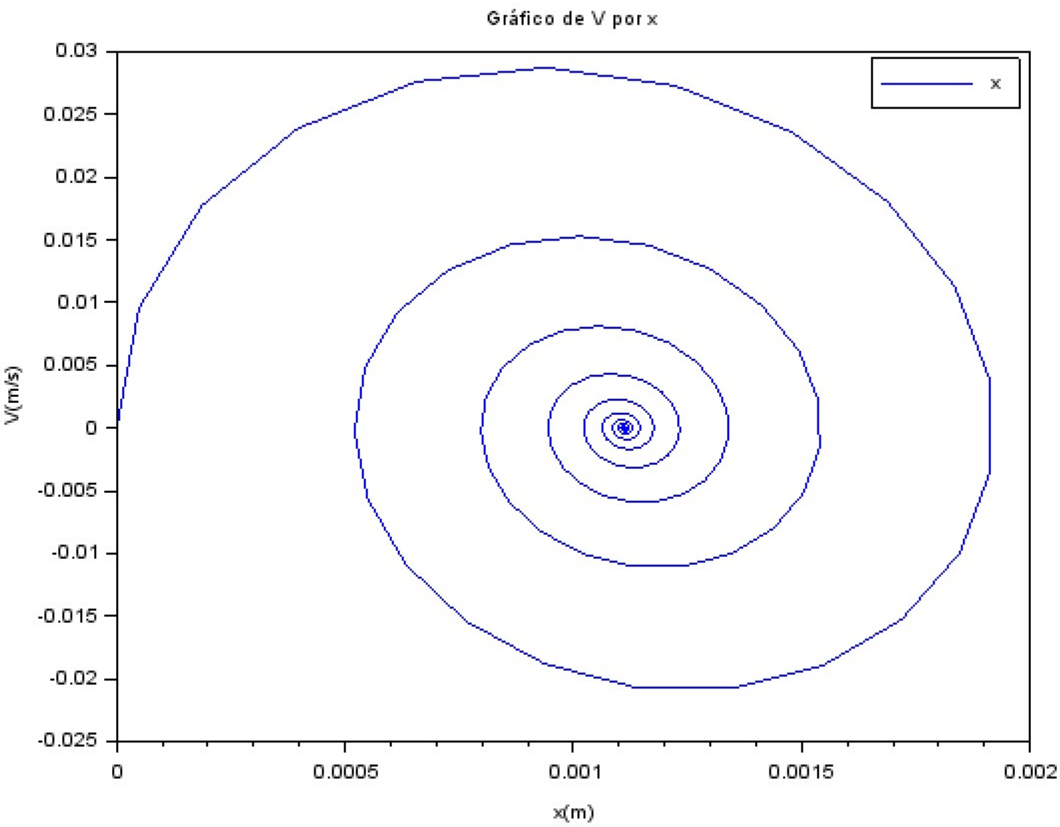
$$|Im(t_i)| = 9\sqrt{11} = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} = 29,85rad/s \tag{10}$$

3 Simulação do sistema com diferentes cenários

O gráfico de V por x desse sistema para diferentes valores de ζ estão mostrados a seguir, os parâmetros m e k são 1 Kg e 900 N/m respectivamente:

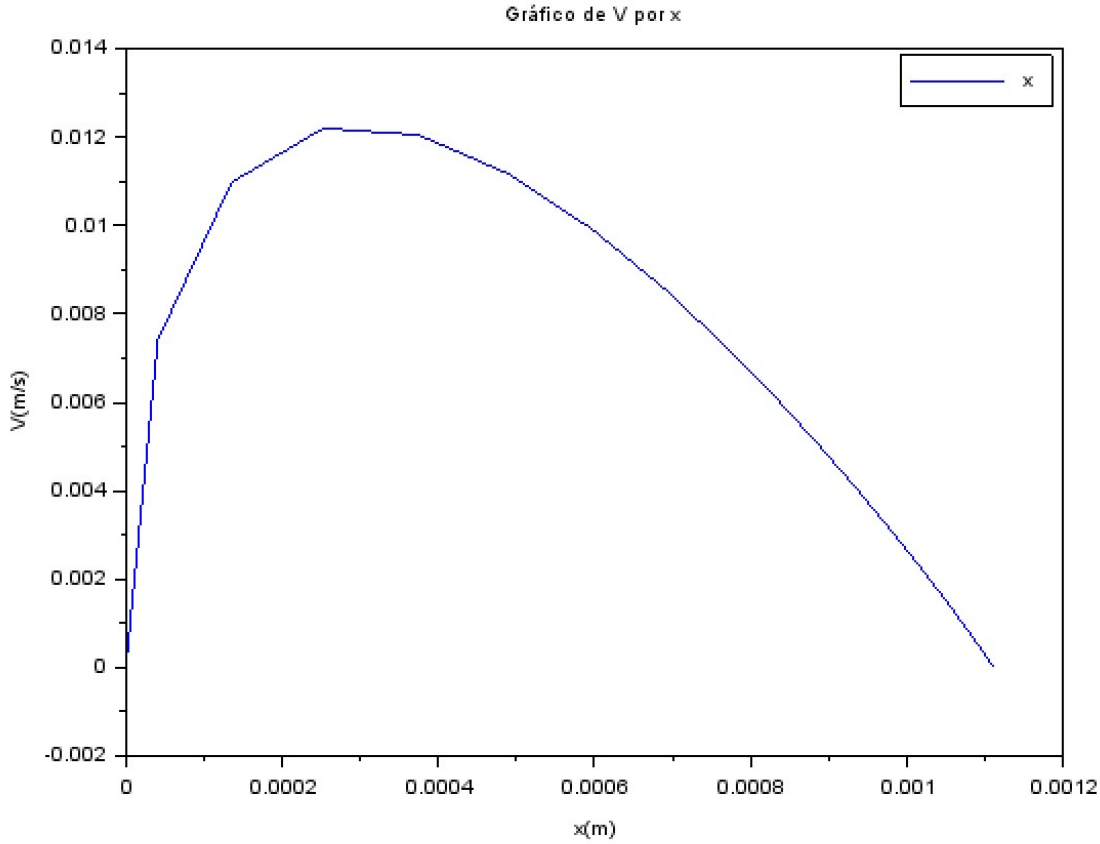
Para $\zeta = 0{,}1 < 1$:

Figura 4 – V por x para $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ com $\zeta = 0,1$



Para $\zeta = 1$:

Figura 5 – V por x para $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ com $\zeta = 1$



Para $\zeta = 5 > 1$:

Figura 6 – V por x para $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ com $\zeta = 5$