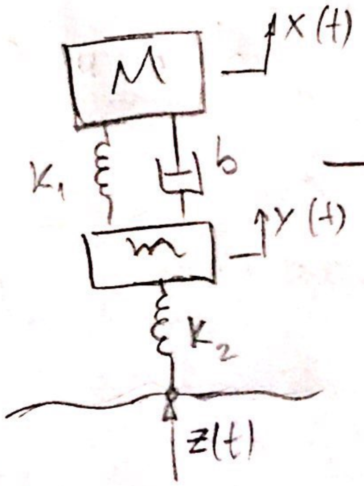
Lucas Souza Vieira Nº USP: 10772863

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exercícios aula 06/10/2020

(2)




Dedução das equações do sistema na aula 27/08

$$\begin{cases} M\ddot{x} + b\dot{x} + K_1 x = b\dot{y} + K_1 y \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + (K_1 + K_2)y = b\dot{x} + K_1 x + K_2 z \end{cases}$$

Vetor de estados: $w(t) = [x \quad y \quad \dot{x} \quad \dot{y}]^T$

$\Rightarrow \dot{w}(t) = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \ddot{x} \quad \ddot{y}]^T$

Vetor de entradas: $u(t) = z(t)$

Escrevendo o sistema em E.E., obtemos:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Aw(t) + Bu(t) \\ r(t) = Cw(t) + Du(t) \end{cases}$$

Onde $r(t)$ é o vetor de saídas

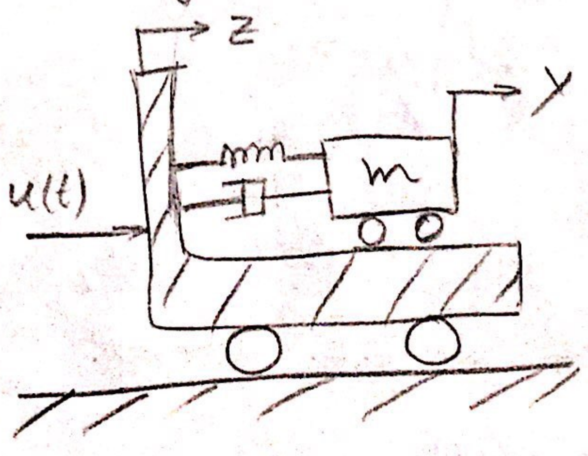
As matrizes do E.E. ficam como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1}{M} & \frac{K_1}{M} & -\frac{b}{M} & \frac{b}{M} \\ \frac{K_1}{m} & -\frac{(K_1+K_2)}{m} & \frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_2}{m} \end{bmatrix}$$

Considerando $r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, então:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 Dedução das equações do sistema presentes nos exercícios entregues da aula de 27/08/2020.




3.2) $\begin{cases} M\ddot{z} + b\dot{z} + kz = b\dot{y} + ky + u(t) \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{z} + kz \end{cases}$

Reescrevendo em E.E., sendo o vetor de estados

$$x(t) = \begin{bmatrix} y & z & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T$$

Obtemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t) =} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{b}{m} & \frac{b}{m} \\ \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & \frac{b}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ z \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{u(t)}_{u(t)}$$

Se o vetor de saídas for $r(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}^T$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}}_{r} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ z \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{u(t)}_{u}$$

3.1) Somando as equações do sistema:

$$m\ddot{y} + M\ddot{z} = u(t)$$

Se $m >> M \Rightarrow m\ddot{y} = u(t)$

Novo vetor de estados: $x(t) = \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$

Supondo vetor de saídas: $r(t) = \dot{y}$

Escrevendo em E.E.:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{u(t)}_{u(t)}$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

④ Equações do sistema deduzidas nos exercícios entregues para a aula de 27/08/2020.

a) Equações do sistema para grandes movimentos:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + (K_{p_1} + K_1) x_1 = K_{p_1} z(t) + K_1 (x_G + l_1 \operatorname{sen}\theta) + b_1 (\dot{x}_G + l_1 \dot{\theta} \cos\theta) \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + (K_{p_2} + K_2) x_2 = K_{p_2} z(t-\alpha) + K_2 (x_G - l_2 \operatorname{sen}\theta) + b_2 (\dot{x}_G - l_2 \dot{\theta} \cos\theta) \\ M \ddot{x}_G + (b_1 + b_2) \dot{x}_G + (K_1 + K_2) x_G = K_1 (x_1 - l_1 \operatorname{sen}\theta) + K_2 (x_2 + l_2 \operatorname{sen}\theta) + \\ \qquad + b_1 (\dot{x}_1 - l_1 \dot{\theta} \cos\theta) + b_2 (\dot{x}_2 + l_2 \dot{\theta} \cos\theta) \\ J_G \ddot{\theta} + (b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2) \dot{\theta} \cos^2\theta + (K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2) \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \\ \qquad = \left[ K_1 l_1 (x_1 - x_G) + K_2 l_2 (x_G - x_2) + b_1 l_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_G) + b_2 l_2 (\dot{x}_G - \dot{x}_2) \right] \cos\theta \end{cases}$$

Seja $w(t) = [x_1 \quad x_2 \quad x_G \quad \theta \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_G \quad \dot{\theta}]^T$

o vetor de estados do sistema. Reescrevendo as equações não lineares na forma de E.E.:

$$w(t) = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6 \quad w_7 \quad w_8]^T$$

$$\begin{cases}
\dot{w}_1 = w_5 \\
\dot{w}_2 = w_6 \\
\dot{w}_3 = w_7 \\
\dot{w}_4 = w_8 \\
\dot{w}_5 = \frac{1}{m_1}\Big[k_{p_1} z(t) + k_1(w_3 + l_1 \operatorname{sen} w_4) + b_1(w_7 + l_1 w_8 \cos w_4) + \\
\qquad - b_1 w_5 - (k_{p_1} + k_1) w_1\Big] \\
\dot{w}_6 = \frac{1}{m_2}\Big[k_{p_2} z(t-\alpha) + k_2(w_3 - l_2 \operatorname{sen} w_4) + b_2(w_7 - l_2 w_8 \cos w_4) \\
\qquad - b_2 w_6 - (k_{p_2} + k_2) w_2\Big] \\
\dot{w}_7 = \frac{1}{M}\Big[k_1(w_1 - l_1 \operatorname{sen} w_4) + k_2(w_2 + l_2 \operatorname{sen} w_4) + b_1(w_1 - l_1 w_8 \cos w_4) \\
\qquad + b_2(w_6 + l_2 w_8 \cos w_4) - (b_1 + b_2) w_7 - (k_1 + k_2) w_3\Big] \\
\dot{w}_8 = \frac{1}{J_G}\Big\{\Big[k_1 l_1 (w_1 - w_3) + k_2 l_2 (w_3 - w_2) + b_1 l_1 (w_5 - w_7) + \\
\qquad + b_2 l_2 (w_7 - w_6)\Big] \cos w_4 - (b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2) w_8 \cos^2 w_4 + \\
\qquad - (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \operatorname{sen} w_4 \cos w_4\Big\}
\end{cases}$$

b) Equações para pequenos movimentos:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + (k_{p_1} + k_1) x_1 = k_{p_1} z(t) + k_1 (x_G + l_1 \theta) + b_1 (\dot{x}_G + l_1 \dot{\theta}) \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + (k_{p_2} + k_2) x_2 = k_{p_2} z(t-\alpha) + k_2 (x_G - l_2 \theta) + b_2 (\dot{x}_G - l_2 \dot{\theta}) \\ M \ddot{x}_G + (b_1 + b_2) \dot{x}_G + (k_1 + k_2) x_G = k_1 (x_1 - l_1 \theta) + k_2 (x_2 + l_2 \theta) + \\ \qquad + b_1 (\dot{x}_1 - l_1 \dot{\theta}) + b_2 (\dot{x}_2 + l_2 \dot{\theta}) \\ J_G \ddot{\theta} + (b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2) \dot{\theta} + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \theta = k_1 l_1 (x_1 - x_G) + \\ \qquad + k_2 l_2 (x_G - x_2) + b_1 l_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_G) + b_2 l_2 (\dot{x}_G - \dot{x}_2) \end{cases}$$

Sendo $x(t) = [x_1 \ x_2 \ x_G \ \theta \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_G \ \dot{\theta}]^T$ o vetor de estados, reescrevemos o sistema na forma de E.E.:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(k_{p_1}+k_1)}{m_1} & 0 & \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1 l_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & 0 & \frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1 l_1}{m_1} \\ 0 & -\frac{(k_{p_2}+k_2)}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2 l_2}{m_2} & 0 & \frac{-b_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & \frac{-b_2 l_2}{m_2} \\ \frac{k_1}{M} & \frac{k_2}{M} & -\frac{(k_1+k_2)}{M} & \frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{M} & \frac{b_1}{M} & \frac{b_2}{M} & -\frac{(b_1+b_2)}{M} & \frac{b_2 l_2 - b_1 l_1}{M} \\ \frac{k_1 l_1}{J_G} & -\frac{k_2 l_2}{J_G} & \frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{J_G} & -\frac{(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{J_G} & \frac{b_1 l_1}{J_G} & \frac{-b_2 l_2}{J_G} & \frac{b_2 l_2 - b_1 l_1}{J_G} & -\frac{(b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2)}{J_G} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} z(t) & z(t-\alpha) \end{bmatrix}^T$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{p_1}}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{K_{p_2}}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $y(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_G & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$ é o vetor de saídas, obtemos as matrizes C e D segundo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$D =$ matriz nula $(4 \times 2)$.

⑤ Dedução das equações do sistema nos exercícios entregues para a aula de 27/08/2020.

Sistema não linear:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} = u + ml\left(\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + \ddot{\theta}\cos\theta\right) & (i) \\ \frac{4}{3}l\ddot{\theta} - g\operatorname{sen}\theta = -\ddot{x}\cos\theta & (ii) \end{cases}$$

Vetor de estados:

$$w(t) = \begin{bmatrix} x & \theta & \dot{x} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix}^T$$

Vetor de entradas:

$$u = u(t)$$

↳ Força

Devemos reescrever o sistema de equações diferenciais de modo que as equações no E.E. sejam apenas função das entradas do vetor de estados.

Isolando $\ddot{x}$ em (i):

$$\ddot{x} = \frac{1}{M+m}\left[u + ml\left(\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + \ddot{\theta}\cos\theta\right)\right]$$

Substituindo em (ii):

$$\left(\frac{4}{3}l + \frac{ml\cos^2\theta}{M+m}\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{ml\dot{\theta}^2}{M+m}\cos\theta - g\right)\operatorname{sen}\theta = -\frac{u\cos\theta}{M+m}$$

Isolando $\ddot{\theta}$ em (ii):

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4l}\left(g\operatorname{sen}\theta - \ddot{x}\cos\theta\right)$$

Substituindo em (i):

$$\left(M+m+\frac{3}{4}m\cos^2\theta\right)\ddot{x} = u(t) + ml\dot{\theta}^2\sin\theta + \frac{3}{4}mg\sin\theta\cos\theta$$

Reescrevendo o sistema não linear na forma de E.E.:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = w_3 \\ \dot{w}_2 = w_4 \\ \dot{w}_3 = \left[\left(g - \frac{ml w_4^2}{M+m}\cos w_2\right)\sin w_2 - \frac{u(t)\cos w_2}{M+m}\right]\left(\frac{4}{3}l + \frac{ml\cos^2 w_2}{M+m}\right)^{-1} \\ \dot{w}_4 = \left(u(t) + ml w_4^2 \sin w_2 + \frac{3}{4}mg\sin w_2 \cos w_2\right)\left(M+m+\frac{3}{4}m\cos^2 w_2\right)^{-1} \end{cases}$$

⑥ Dedução das equações do sistema e sua linearização apresentadas nas aulas de 15/09/2020 e 17/09/2020.

a) E.E. não linear.

Equações do sistema:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - \frac{Ki^2}{x^2} \\ L\frac{di}{dt} + Ri = V(t) \end{cases}$$

Vetor de estados: $w(t) = [x \quad \dot{x} \quad i]^T = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T$

Reescrevendo em E.E.:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = w_2 \\ \dot{w}_2 = g - \frac{K w_3^2}{m w_1^2} \\ \dot{w}_3 = \frac{V(t)}{L} - \frac{R}{L}w_3 \end{cases}$$

Vetor de saídas:

$$y(t) = x(t) = w_1(t)$$

Scanned with CamScanner

b) Feita a linearização, reescrevem-se as equações do sistema em E.E. como:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \ddot{x} \\ \delta \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{2K\dot{x}_{eq}^2}{m x_{eq}^3} & 0 & -\dfrac{2K i_{eq}}{m x_{eq}^2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \\ \delta i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \delta V(t)$$

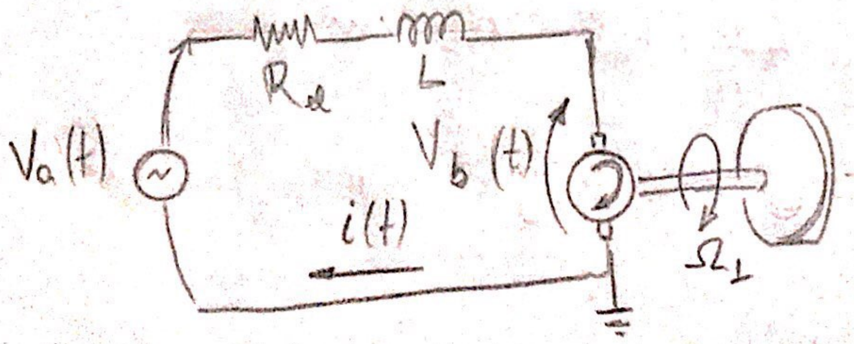
onde $x_{eq}$, $\dot{x}_{eq}$, $i_{eq}$ indicam o valor das variáveis de estado no ponto de equilíbrio do sistema.

Além disso:
$$\begin{cases} \delta x = x - x_{eq} \\ \delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_{eq} \\ \delta i = i - i_{eq} \\ \delta V = V - V_{eq} \end{cases}$$

Para o vetor de saída, $y(t) = 1 \cdot x(t) + 0 \cdot V(t)$
$\Rightarrow y(t) = x(t)$.

7 a)

Modelo físico do motor:




onde $V_b(t) = K_b\, \Omega_1(t) = K_b\, \dot{\theta}_1(t)$

Pela lei das malhas aplicada ao circuito do motor:

$$L\frac{di}{dt} + R_{el} i + V_b = V_a(t)$$

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + R_{el} i + K_b \dot{\theta}_1 = V_a(t)}$$

DCL do disco e do pinhão:


onde

$$\begin{cases} F_c \equiv \text{força reativa imposta pela cremalheira ao pinhão} \\ T_{NLK} = 2K_s |\theta_1 - \theta_2| (\theta_1 - \theta_2) \\ T_i(t) = K_a i(t) \end{cases}$$

TMQM do disco:

$$J_m \ddot{\theta}_1 = T_i(t) - T_{NLK} - B_m \dot{\theta}_1$$

$$\boxed{J_m \ddot{\theta}_1 + 2K_s |\theta_1 - \theta_2| (\theta_1 - \theta_2) + B_m \dot{\theta}_1 = K_a i}$$

Obs: Constante $K_s$ inserida na expressão de $T_{NLK}$ para fins de compatibilidade dimensional: $[K_s] = Nm$.

No caso do exercício, $K_s = 1$.

TMQM do pinhão:

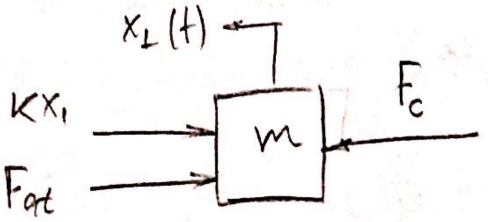
$$\boxed{J_p \ddot{\theta}_2 = T_{NLK} - F_c R}$$

Supondo que o pinhão role sem escorregar sobre a cremalheira: $\dot{x}_1 = \dot{\theta}_2 R \Rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{\theta}_2 R$

Supondo $\theta_2(0) = 0 \Rightarrow x_1 = \theta_2 R$

$$\Rightarrow \boxed{F_c = \frac{1}{R}\left[2K_s \left|\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right|\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right) - J_p \frac{\ddot{x}_1}{R}\right]}$$

DCL do carro:




onde $\boxed{F_{at} = 2\dot{x}_1^3}$

TMB para o carro:

$$m\ddot{x}_1 = F_c - kx_1 - F_{at}$$

$$\boxed{\left(m + \frac{J_p}{R^2}\right)\ddot{x}_1 + 2k\dot{x}_1^3 + kx_1 = \frac{2k_s\left|\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right|\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right)}{R}}$$

Reescrevendo o sistema de equações acoplados

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + R_{el} i + K_b \dot{\theta}_1 = V_a(t) \\ J_m \ddot{\theta}_1 + 2K_s\left|\theta_1 - \dfrac{x_1}{R}\right|\left(\theta_1 - \dfrac{x_1}{R}\right) + B_m \dot{\theta}_1 = K_a i \\ \left(m + \dfrac{J_p}{R^2}\right)\ddot{x}_1 + 2k\dot{x}_1^3 + kx_1 = \dfrac{2K_s\left|\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right|\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right)}{R} \end{cases}$$

b) Reescrevendo as equações do sistema como funções das variáveis de estado $x_1$, $\dot{x}_1$, $\theta_1$, $\dot{\theta}_1$ e $i$:

$$f_1 = \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}\left(V_a(t) - K_b\dot{\theta}_1 - R_a i\right)$$

$$f_2 = \ddot{\theta}_1 = \frac{1}{J_m}\left[K_a i - 2K_s\left|\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right|\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right) - B_m\dot{\theta}_1\right]$$

$$f_3 = \ddot{x}_1 = \frac{R^2}{mR^2 + J_p}\left[\frac{2K_s\left|\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right|\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right)}{R} - 2\dot{x}_1^3 - Kx_1\right]$$

Linearizando por expansão de Taylor até 1ª ordem, calculamos as derivadas parciais dos termos não lineares de $f_2$ e $f_3$:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} = \begin{cases} -\frac{4K_s}{J_m}\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right) & \text{se } \theta_1 > \frac{x_1}{R} \\ \frac{4K_s}{J_m}\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right) & \text{se } \theta_1 < \frac{x_1}{R} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \begin{cases} \frac{4K_s}{J_m R}\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right) & \text{se } \theta_1 > \frac{x_1}{R} \\ -\frac{4K_s}{J_m R}\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right) & \text{se } \theta_1 < \frac{x_1}{R} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \theta_1} = \begin{cases} \frac{4K_s R}{mR^2 + J_p}\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right) & \text{se } \theta_1 > \frac{x_1}{R} \\ -\frac{4K_s R}{mR^2 + J_p}\left(\theta_1 - \frac{x_1}{R}\right) & \text{se } \theta_1 < \frac{x_1}{R} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_1} = -6\dot{x}_1^2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \begin{cases} \dfrac{-4K_s}{mR^2+J_P}\left(\theta_1 - \dfrac{x_1}{R}\right) - \dfrac{R^2}{mR^2+J_P}K & \text{se } \theta_1 > \dfrac{x_1}{R_1} \\ \dfrac{4K_s}{mR^2+J_P}\left(\theta_1 - \dfrac{x_1}{R}\right) - \dfrac{R^2}{mR^2+J_P}K & \text{se } \theta_1 < \dfrac{x_1}{R_1} \end{cases}$$

Definimos ainda:
$$\begin{cases} \delta x_1 = x_1 - x_{eq} \\ \delta \dot{x}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1eq} \\ \delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_{1eq} \\ \delta\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{1eq} \\ \delta i = i - i_{eq} \\ \delta V_a = V_a - V_{a\,eq} \end{cases}$$

Avaliando as derivadas calculadas no equilíbrio, podemos escrever o sistema linearizado de equações:

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = \delta V_a - K_b\,\delta\dot{\theta}_1 - R_a\,\delta i \\ \begin{cases} J_m\ddot{\theta}_1 = K_a\delta i - 4K_s\left(\theta_{1eq} - \dfrac{x_{1eq}}{R}\right)\delta\theta_1 + \dfrac{4K_s}{R}\left(\theta_{1eq} - \dfrac{x_{1eq}}{R}\right)\delta x_1 + \\ \qquad - B_m\dot{\theta}_1, \quad \text{para } \theta_1 \geq \dfrac{x_1}{R} \\ J_m\ddot{\theta}_1 = K_a\delta i + 4K_s\left(\theta_{1eq} - \dfrac{x_{1eq}}{R}\right)\delta\theta_1 - \dfrac{4K_s}{R}\left(\theta_{1eq} - \dfrac{x_{1eq}}{R}\right)\delta x_1 + \\ \qquad - B_m\dot{\theta}_1, \quad \text{para } \theta_1 < \dfrac{x_1}{R} \end{cases} \\ \begin{cases} \left(m + \dfrac{J_P}{R^2}\right)\ddot{x}_1 = 4\dfrac{K_s}{R}\left(\theta_{1eq} - \dfrac{x_{1eq}}{R}\right)\delta\theta_1 - \left[K + \dfrac{4K_s}{R^2}\left(\theta_{1eq} - \dfrac{x_{1eq}}{R}\right)\right]\delta x_1 + \\ \qquad - 6\dot{x}_{1eq}^2\,\delta\dot{x}_1, \quad \text{para } \theta_1 \geq \dfrac{x_1}{R} \\ \left(m + \dfrac{J_P}{R^2}\right)\ddot{x}_1 = -\dfrac{4K_s}{R}\left(\theta_{1eq} - \dfrac{x_{1eq}}{R}\right)\delta\theta_1 - \left[K - \dfrac{4K_s}{R^2}\left(\theta_{1eq} - \dfrac{x_{1eq}}{R}\right)\right]\delta x_1 + \\ \qquad - 6\dot{x}_{1eq}^2\,\delta\dot{x}_1, \quad \text{para } \theta_1 < \dfrac{x_1}{R} \end{cases} \end{cases}$$

c) Definimos o vetor de estados:

$$\delta x(t) = [\delta x_1\ \ \delta \dot{x}_1\ \ \delta\theta_1\ \ \delta\dot{\theta}_1\ \ \delta i]^T$$

Reescrevendo as equações linearizadas na forma de E.E.:

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u \\ y = C\delta x + D\delta u \end{cases}$$

$u(t) = V_a(t) \Leftrightarrow \delta u = \delta V_a$

Arbitramos $y(t) = [\delta\dot{x}_1\ \ \delta\dot{\theta}_1\ \ \delta i]^T$

Se $\theta_1 \geqslant \frac{x_1}{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R^2}{mR^2+J_p}\left[K + \frac{4K_s}{R^2}\left(\theta_{1eq} - \frac{x_{1eq}}{R}\right)\right] & -\frac{6R^2\dot{x}_{eq}^2}{mR^2+J_p} & -\frac{4RK_s}{mR^2+J_p}\left(\theta_{1eq} - \frac{x_{1eq}}{R}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4K_s}{J_m R}\left(\theta_{1eq} - \frac{x_{1eq}}{R}\right) & 0 & -\frac{4K_s}{J_m}\left(\theta_{1eq} - \frac{x_{1eq}}{R}\right) & -\frac{B_m}{J_m} & \frac{K_a}{J_m} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K_b}{L} & -\frac{R_a}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$D$ = matriz nula $(3 \times 1)$.

Se $\theta_1 < \frac{x_1}{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-R^2}{mR^2+J_p}\left[k - \frac{4K_s}{R^2}\left(\theta_{1eq} - \frac{x_{1eq}}{R}\right)\right] & -\frac{6R^2\dot{x}_{1eq}^{2}}{mR^2+J_p} & \frac{4RK_s}{mR^2+J_p}\left(\theta_{1eq} - \frac{x_{1eq}}{R}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4K_s}{J_m R}\left(\theta_{1eq} - \frac{x_{1eq}}{R}\right) & 0 & \frac{4K_s}{J_m}\left(\theta_{1eq} - \frac{x_{1eq}}{R}\right) & -\frac{B_m}{J_m} & \frac{K_a}{J_m} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K_b}{L} & -\frac{R_{ee}}{L} \end{bmatrix}$$

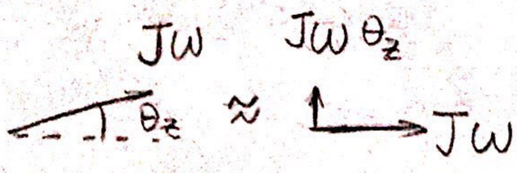
B, C e D seguem iguais ao caso anterior $\left(\theta_1 \geq \frac{x_1}{R}\right)$.

8) Assumimos a hipótese de pequenas amplitudes e pequenos movimentos para obter o E.E. linearizado.

Seja d a distância do centro do disco ao mancal do quadro interno.

O TMQM em torno do eixo x, escolhendo o centro do disco com polo, fornece:

$$J_x \ddot{\theta}_x = \underbrace{-2B\dot{\theta}_x}_{\text{Mancais}} \underbrace{-2kd\,\theta_x}_{\text{Mola}} \underbrace{-J\omega\theta_z}_{\text{Momento devido à rotação em torno de z}}$$



$$\Rightarrow \boxed{J_x \ddot{\theta}_x + 2B\dot{\theta}_x + 2kd\,\theta_x = -J\omega\,\theta_z}$$

Vetor de estados:

$$x(t) = [\theta_x \quad \dot{\theta}_x]^T$$

Vetor de entradas:

$$u(t) = \dot{\theta}_z(t)$$

Escrevendo na forma de E.E.:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2kd}{J_x} & -\frac{2B}{J_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-J\omega}{J_x} \end{bmatrix} \int \dot{\theta}_z\,dt$$

O vetor de saídas

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta_x \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix}$$