

DIFRAÇÃO DE ELÉTRONS

RESUMO

No experimento foi estudada a difração de elétrons utilizando um tubo de difração de elétrons, sendo o efeito observado pela variação da tensão no tubo.

INTRODUÇÃO

No século XX, Louis de Broglie propôs em sua tese de doutorado que todos os corpos em movimento têm propriedades de onda que complementam suas propriedades de partículas. Partindo do pressuposto que a relação de energia de Planck era válida ($E = h\nu$), de Broglie relacionou o comprimento de onda com o momento linear da partícula:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \quad (1)$$

da relação em que $c = \lambda\nu$. Sendo: $\lambda \rightarrow$ comprimento de onda de de Broglie; $h \rightarrow$ constante de Planck ($6,62 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ Kg/s}$); $p \rightarrow$ momento linear ($p = mv$). [1]

Em 1927, a ~~prova~~ proposta de de Broglie foi confirmada por meio de experimentos de difração de feixe de elétrons, quando estes atravessavam uma grade relativamente fina compo-

dade ao tamanho do feixe. Assim, foi possível mostrar que, por meio de uma diferença de potencial, os elétrons eram acelerados e apresentavam um comprimento de onda.

Na figura 1 tem-se o esquema experimental, sendo possível ver a trajetória do elétron. O elétron parte do cátodo e adquire energia (potencial e cinética) quando se aplica uma diferença de potencial, medindo-se do cátodo ao anodo.

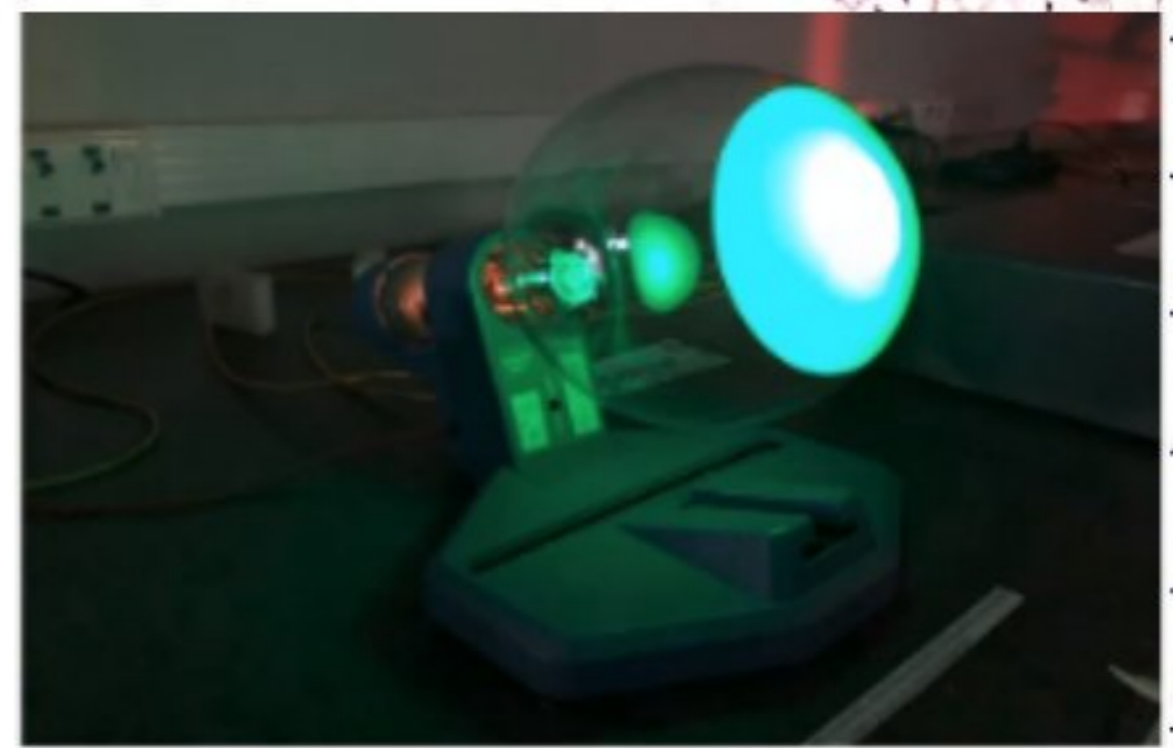
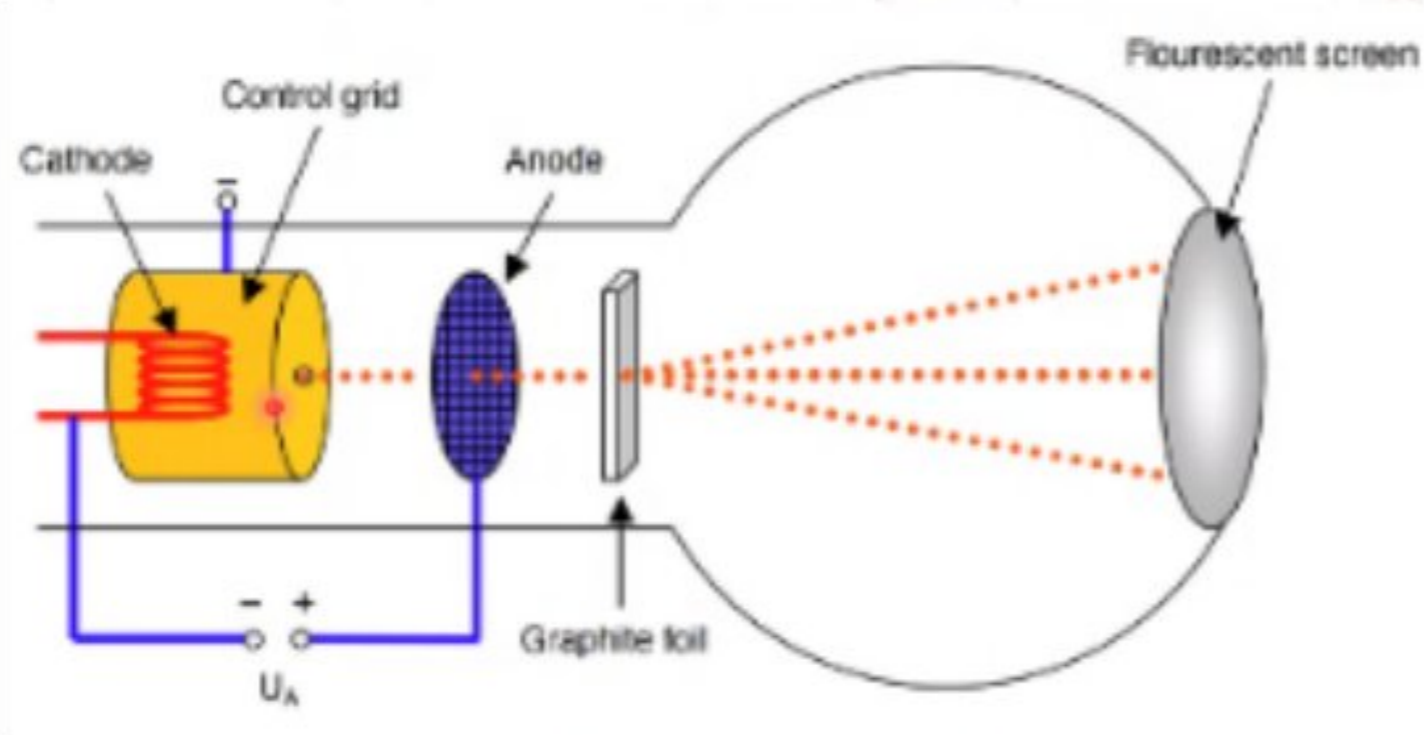


FIGURA 1: Esquema experimental e visualização do interior do tubo para difratar elétrons;

Assim, ao atravessar uma rede de carbono, os elétrons serão difratados em várias direções, sendo possível determinar o espaço interatômico dos átomos de carbono.

Ademais, vale ressaltar que o carbono pode ser encontrado em diferentes formas alotrópicas estáveis como o grafite, que apresenta uma estrutura molecular sendo um plano triangular com ligações do tipo σ (interação forte e frontal) e do tipo π (interação fraca paralela). As ligações σ estão relacionadas com as propriedades mecânicas, ocasionando a forte interação dos elétrons (localizados); e as ligações π estão

relacionadas com as propriedades eletrônicas, suspensas pela fraca interação entre os elétrons. [2]

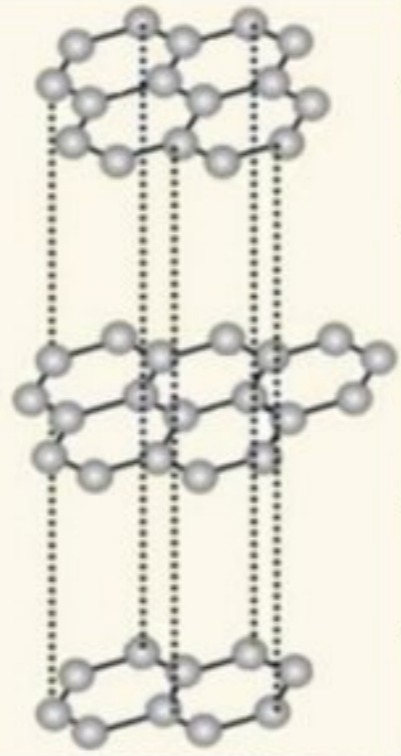


FIGURA 2 - Forma alotrópica do carbono como grafite, com três ligações σ e uma π ;

No nosso estudo teremos a amostra policristalina de grafite, que é constituída por vários cristais, onde cada um deles tem diferentes orientações espaciais. [3]. Com isso, o fenômeno de difração ocorrerá quando a onda encontra os obstáculos espaçados regularmente, que seria referente a estrutura do átomo, ocasionando o espalhamento da onda. e, além disso, o espaçamento entre eles será comparável, em magnitude, com o comprimento da onda.

OBJETIVO

Estudar o fenômeno de difração de elétrons e empregá-lo para determinar o espaçamento interatômico de uma amostra policristalina de grafite com estruturas microscópicas desconhecidas.

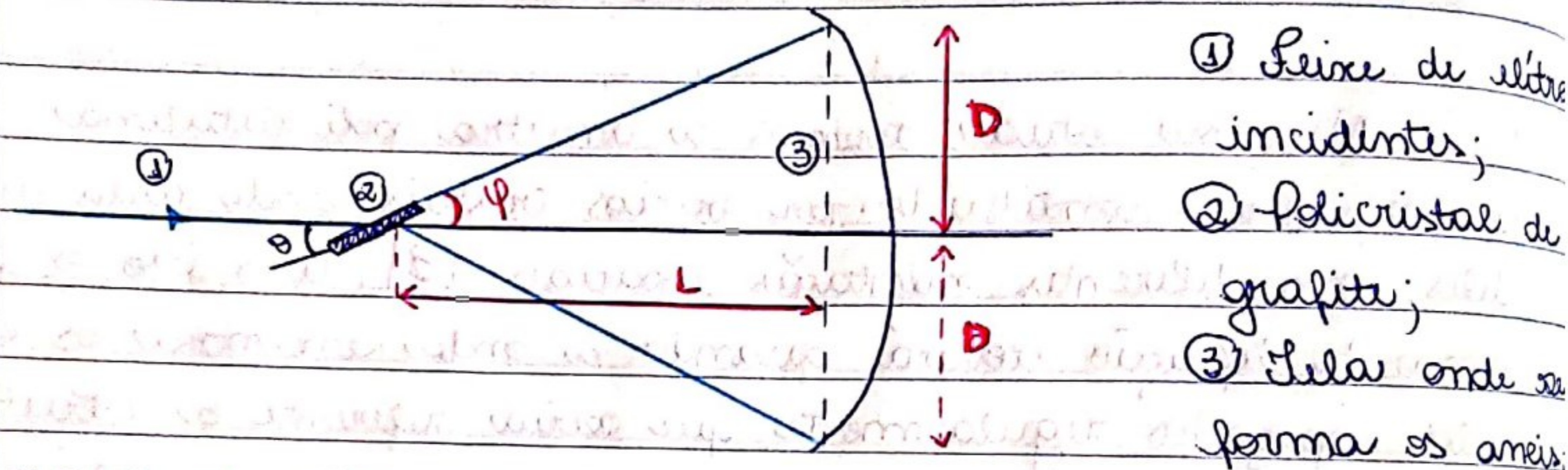
METODOLOGIA

No experimento usará um tubo (TEL. 2555) que produz um feixe estreito de elétrons através de um cátodo aquecido em um bulbo evacuado. Neste bulbo, o feixe de elétrons é direcionado para uma grade composta por uma fina camada de cristais de grafite (carbono) e, ao penetrar através do alvo de carbono, o feixe é difratado e o efeito poderá

ser observado na tela fosforescente na superfície do bulbo, através da formação de anéis.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

1. Os componentes do experimento foram diagramados:



- ① Feixe de elétrons incidentes;
- ② Policristal de grafite;
- ③ Tela onde se forma os anéis.

FIGURA 3: Diagrama de pseudimento experimental;

2. Foi mensurada a distância do alvo de carbono (na abertura da saída do câmbio de elétrons) até a tela fosforescente, tendo a distância equivalente a $L = (0,130 \pm 0,005) \text{ m}$. E a partir disso, foram determinadas valores de diâmetros maior e menor, em relação as tensões aplicadas:

TABELA 1: referente aos dados experimentais;

Tensão da fonte ($\pm 0,01$) (kV)	Diâmetro menor ($\pm 0,05$) (mm)	Diâmetro maior ($\pm 0,05$) (mm)	Desvio padrão (D menor) (mm)	Desvio padrão (D maior) (mm)
4,00	26,60	44,70	1,34	1,53
4,00	25,60	45,05		
4,00	25,80	44,90		
4,00	24,20	43,85		
4,00	22,90	41,80		
4,00	24,40	41,75		
3,50	27,75	45,20	1,53	1,07
3,50	26,65	46,60		
3,50	25,25	47,45		
3,50	24,45	45,10		
3,50	24,35	44,60		
3,50	23,80	45,50		
3,00	27,90	48,40	0,23	0,94
3,00	28,35	49,65		
3,00	28,10	47,80		
2,50	30,85	54,85	0,72	0,51
2,50	30,75	54,00		
2,50	32,05	54,90		

3. Obtenhamos uma expressão para o comprimento de onda do elétron em função da tensão de aceleração dos elétrons:

Da equação 1: $\lambda = h = h$ (I)

$$p = mv$$

Como o elétron parte do repouso, a energia potencial final é igual a energia cinética final:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}} \Rightarrow eV_p = \frac{1}{2} m v_p^2 \quad (\text{II})$$

$$\frac{1}{2} (mv_p)^2 = eV_p \Rightarrow (mv_p)^2 = 2meV_p$$

$$\frac{2}{2} m$$

$$\therefore p = mv = \sqrt{2me \cdot V}$$

Substituindo (II) em (I):

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

$V \rightarrow$ potencial aplicado para

acelerar os elétrons;

$m \rightarrow$ massa do elétron;

$h \rightarrow$ constante de Planck

Ainda, substituindo os valores de h , m e e , tem-se:

Como: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$

$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ Kg/s}$

$$\lambda = 1,23 (V_p)^{-1/2} \cdot [\text{nm}]$$

4. Obtenhamos uma expressão para o diâmetro dos anéis de difração formados em função da tensão de aceleração dos elétrons.

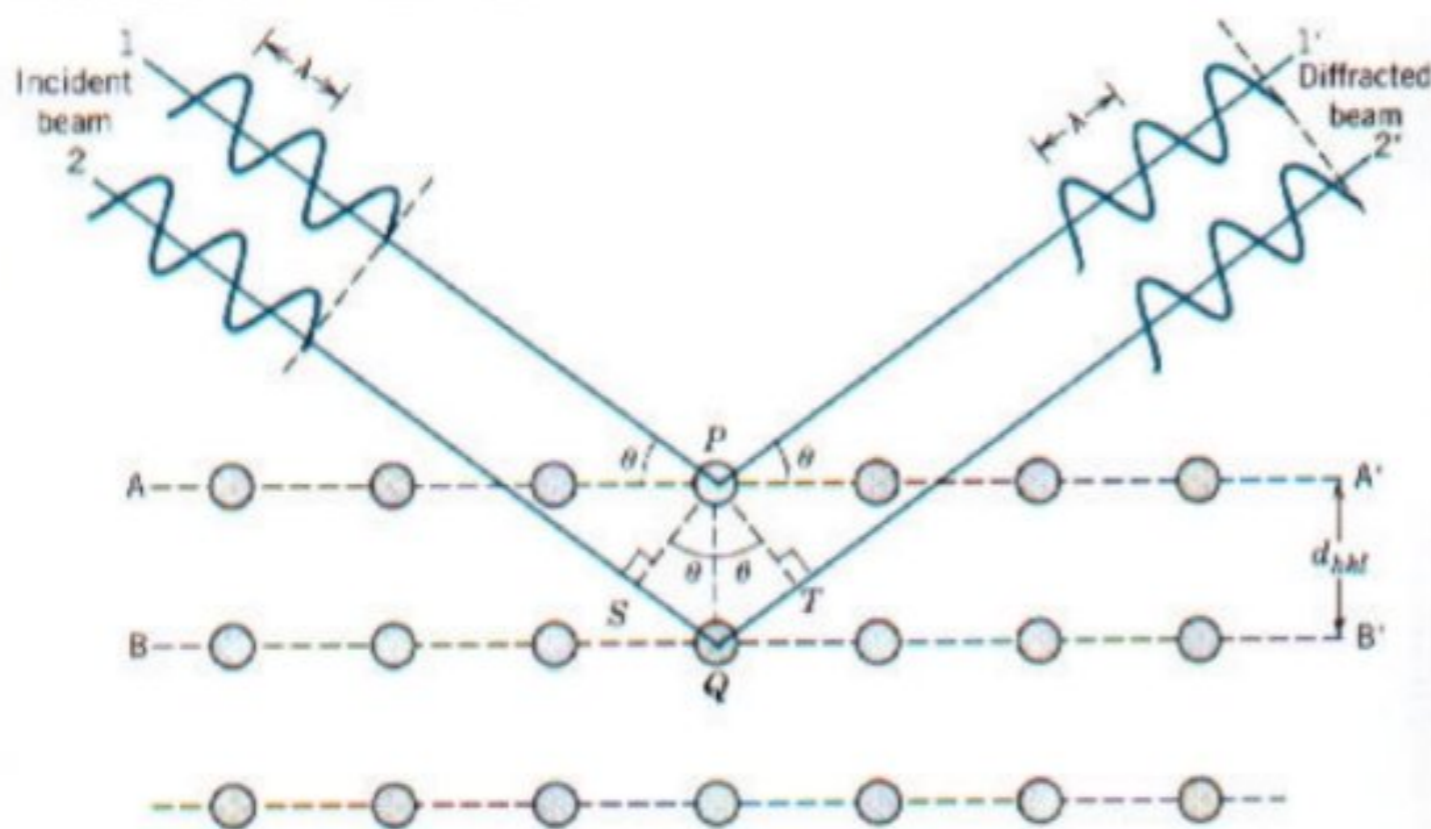


FIGURA 4: Representação de como ocorre a difração;

A partir da figura 4 temos:

$$n\lambda = \overline{SA} + \overline{AT} = d \sin \theta + d \sin \theta$$

$$n\lambda = 2d \sin \theta \rightarrow \text{lei de Bragg}$$

E, pela figura 3 temos:

$$\text{para ângulos pequenos: } \sin \varphi \cong \tan \varphi \cong \varphi,$$

sendo:

$$\varphi = \theta \Rightarrow \theta = \frac{\varphi}{2} \quad ; \quad \varphi = \frac{D}{2L}$$

Substituindo na lei de Bragg:

$$\lambda = 2d \sin \theta \quad , \quad \text{para } n=1$$

$$\lambda = 2d \theta = 2d \varphi$$

$$\lambda = d\varphi = d \cdot \frac{D}{2L} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{dD}{2L} \quad (\text{III})$$

Substituindo III em:

$$\lambda = 1,23 \cdot V_p^{-1/2} \Rightarrow \frac{d \cdot D}{2L} = 1,23 \cdot V_p^{-1/2}$$

$$D = \frac{1,23 \cdot (2L) \cdot V_p^{-1/2}}{d} \quad (\text{IV})$$

onde:

$L \rightarrow$ distância do alvo até a tela;

$D \rightarrow$ diâmetro dos anéis;

$V_p \rightarrow$ tensão de aceleração dos elétrons;

$d \rightarrow$ distância interplanar dos planos cristalinos;

Expressando a equação (IV) numa equação linear ($y = ax + b$), para aplicarmos nos dados experimentais, temos:

$$D = \frac{1,23 \cdot 2L}{d} \cdot V_p^{-1/2} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = D \\ x = V_p^{-1/2} \end{cases} \quad ; \quad a = \frac{1,23 \cdot 2L}{d}$$

6. Montou-se um gráfico dos diâmetros em função da tensão aplicada:

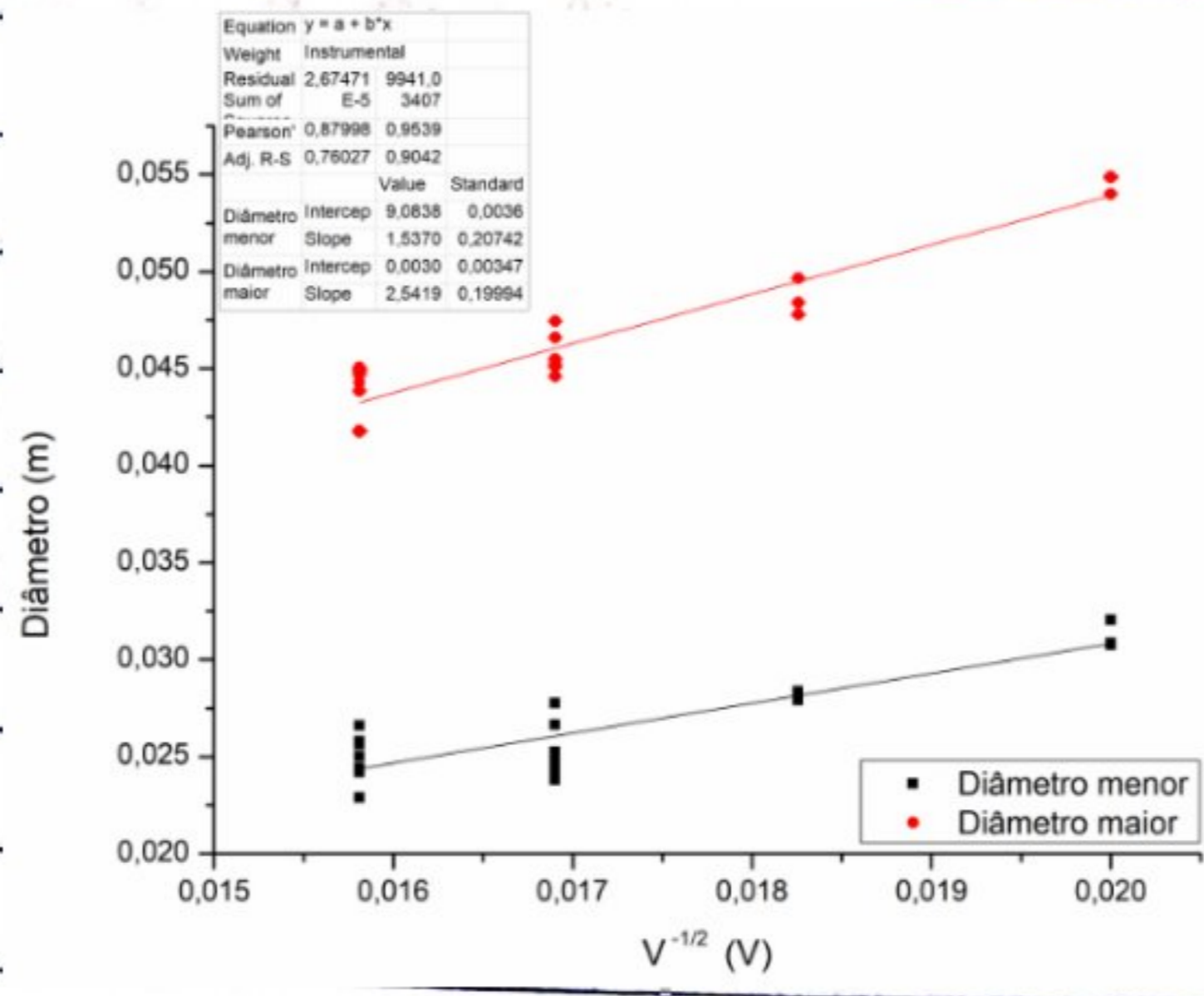


FIGURA 5: gráfico de diâmetro em função de $V^{-1/2}$ usando o fitting linear;

Após fazer o ajuste da função linear no gráfico, foi determinada os espaçamentos interatômicos do grafite:

7. A partir da relação: $D = 1,23 \cdot 2L \cdot V_f^{-1/2}$, sendo que:

$$a = 1,23 \cdot 2 \cdot L \Rightarrow d = 1,23 \cdot 2 \cdot 1,30 = 3,198$$

Assim:

DIÂMETRO MENOR: $d = \frac{3,198}{2,54} = 2,08 \text{ \AA} \pm 0,02 \text{ \AA}$

DIÂMETRO MAIOR: $d = \frac{3,198}{2,54} = 1,26 \text{ \AA} \pm 0,03 \text{ \AA}$

Os valores teóricos para o espaçamentos interatômico do grafite é $2,13 \text{ \AA}$ para o diâmetro menor e $1,23 \text{ \AA}$ para o diâmetro maior, tivemos um erro relativo de 2% para o diâmetro maior;

do menor e 2,5% para o diâmetro maior. Com isso podemos provar que o experimento de difração de elétrons foi válido.

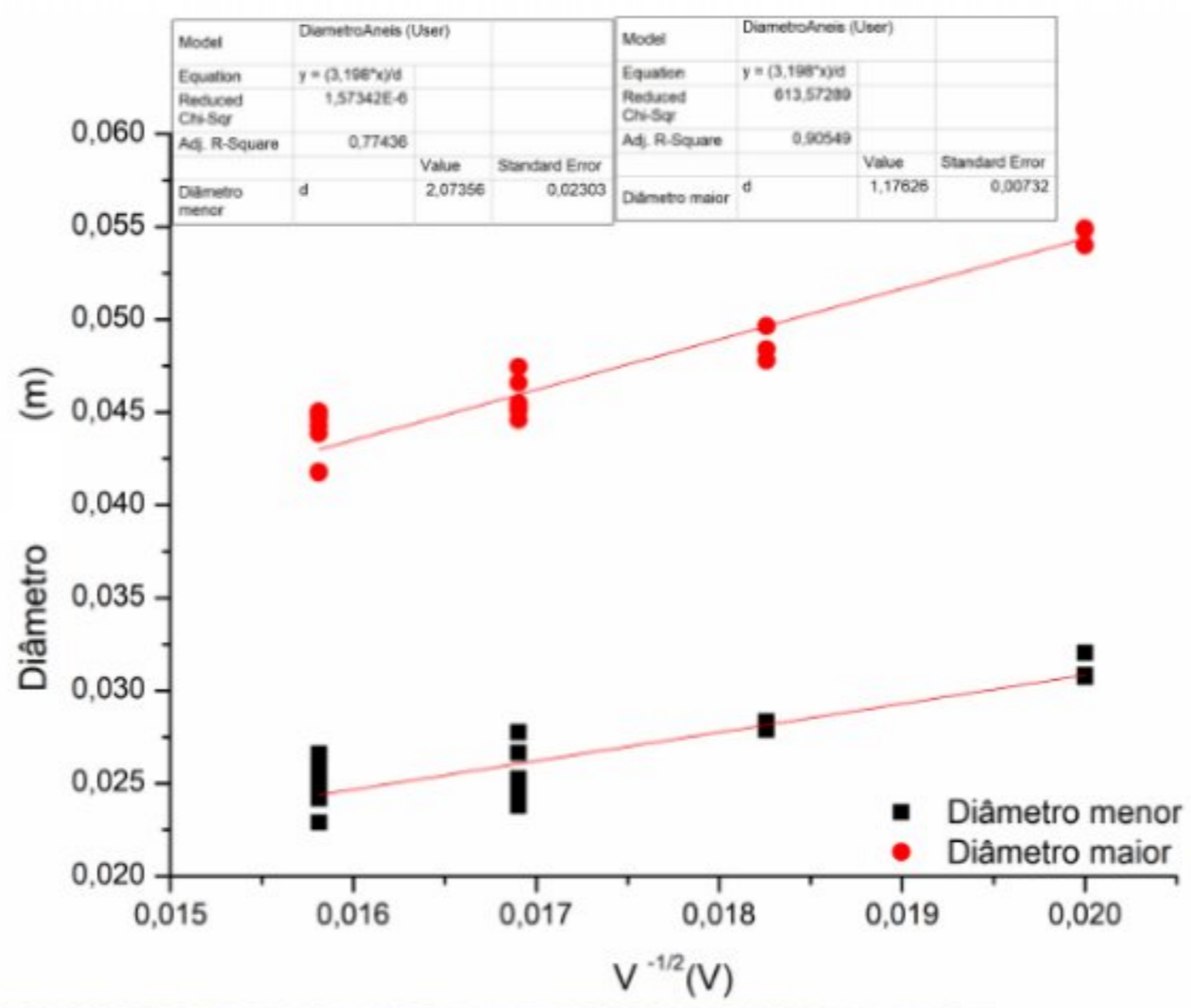
Outra maneira que calculamos os valores de d para os diâmetros maiores ^{menores} foi substituindo os valores de D menor e D maior da tabela 1 na equação IV e os valores de $V^{-1/2}$. Segue:

TABELA 2: Referente aos dados experimentais;

$V^{-1/2}$	d menor (10^{-10}) (m)	d maior (10^{-10}) (m)	d menor/ d maior
0,0158	1,90	1,13	1,68
0,0158	1,98	1,12	1,76
0,0158	1,96	1,13	1,74
0,0158	2,09	1,15	1,81
0,0158	2,21	1,21	1,83
0,0158	2,07	1,21	1,71
0,0169	1,95	1,20	1,63
0,0169	2,03	1,16	1,75
0,0169	2,14	1,14	1,88
0,0169	2,21	1,20	1,84
0,0169	2,22	1,21	1,83
0,0169	2,27	1,19	1,91
0,0183	2,09	1,21	1,73
0,0183	2,06	1,18	1,75
0,0183	2,08	1,22	1,70
0,0200	2,07	1,17	1,78
0,0200	2,08	1,18	1,76
0,0200	2,00	1,17	1,71

Veremos que, para a tensão de 4KV, os valores médios foram 2,02 Å e 1,14 Å, para d menor e d maior respectivamente, com o erro relativo percentual de 5% e 7%. Para a tensão de 35 KV tivemos a média 2,18 Å e 1,19 Å, com erro relativo percentual de 2% e 3%. Para a tensão de 3KV, a média foi 2,08 Å e 1,21 Å, com erro relativo percentual de 2% e 1,6%. Por fim, para a tensão 2,5KV, os valores médios foram 2,07 Å e 1,17 Å, com erro relativo percentual de 3% e 5%.

Ademais, também usamos a própria equação (IV) no gráfico de diâmetros em função de $V^{-1/2}$, segue:



Diâmetro menor: $d = (2,07 \pm 0,02) \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 Diâmetro maior: $d = (1,18 \pm 0,01) \cdot 10^{-10} \text{ m}$

FIGURA 6: Gráficos do diâmetro em função de $V^{-1/2}$ usando no fitting a equação (IV);

Assim, pode-se provar que o experimento sobre difração de elétrons é válido, apesar das incertezas nas medidas. Logo, obtivemos resultados quase exatos e bem precisos para os diâmetros menor e maior.

11. Da equação 1 temos que o comprimento de onda é inversamente proporcional ao momento e, pela relação:

$$p = \sqrt{2mk} = \sqrt{2m \cdot q \cdot V} \quad \therefore \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mqV}}$$

sendo m a massa do elétron e q a carga do elétron (nesse caso), e V a tensão. Logo, o experimento necessita de um alta voltagem, provando que o efeito relativístico não interfere.

12. O grafite se constitui de camadas bidimensionais unidas a outras camadas bidimensionais paralelas e, dentro de cada arranjo, os átomos tem uma configuração hexagonal (vide figura 2), onde pode-se observar a distância entre os planos. Logo, o grafite não tem configuração cúbica, sendo está usada para uma aproximação grosseira.

13. Os parâmetros de rede da célula não são os responsáveis pela formação do padrão de difração observado, mas sim os planos atômicos. Na figura 4 tem-se a representação do caminho do feixe ao ser incidido na direção dos planos dos átomos.

14. Os dois anéis observados são referentes a dois planos interatômicos diferentes, e são ocasionados pela reflexão do feixe nos planos da rede com distâncias interatômicas d_1 (menor) e d_2 (maior).

→ Obs. d_1 porque seria o primeiro anel e d_2 por ser o segundo anel.

Ademais vale ressaltar que os espaçamentos interatômicos d_1 e d_2 possuem valores ~~distintos~~ distintos pois, caso fossem iguais, não seria possível visualizar dois anéis.

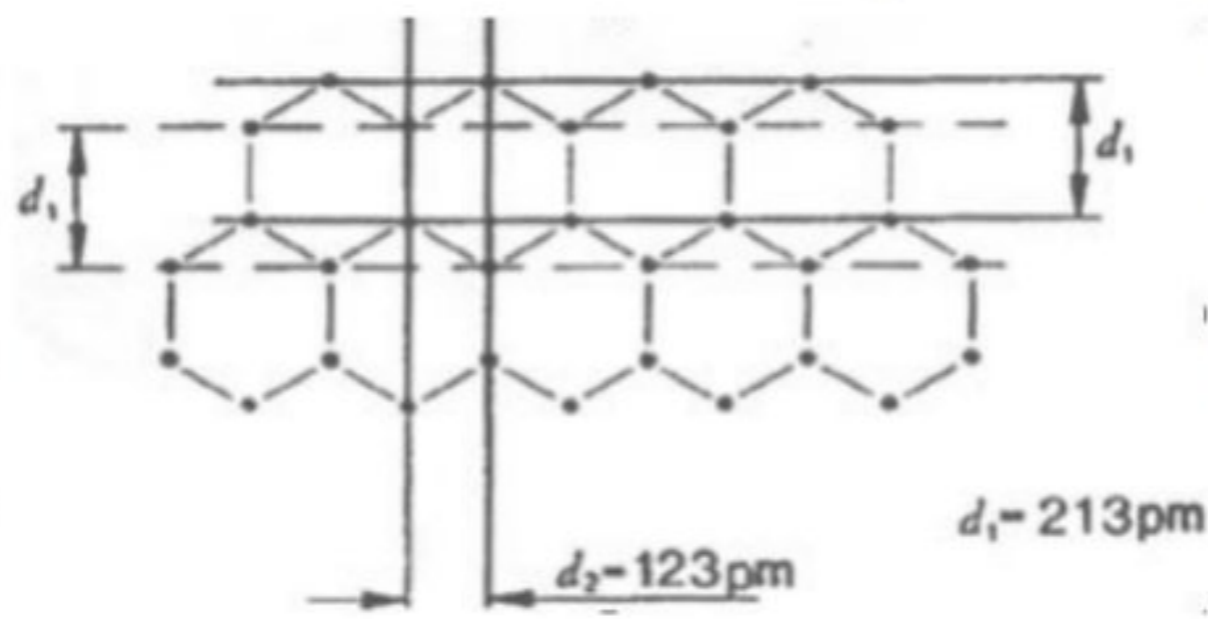


FIGURA 7: Representação dos planos do

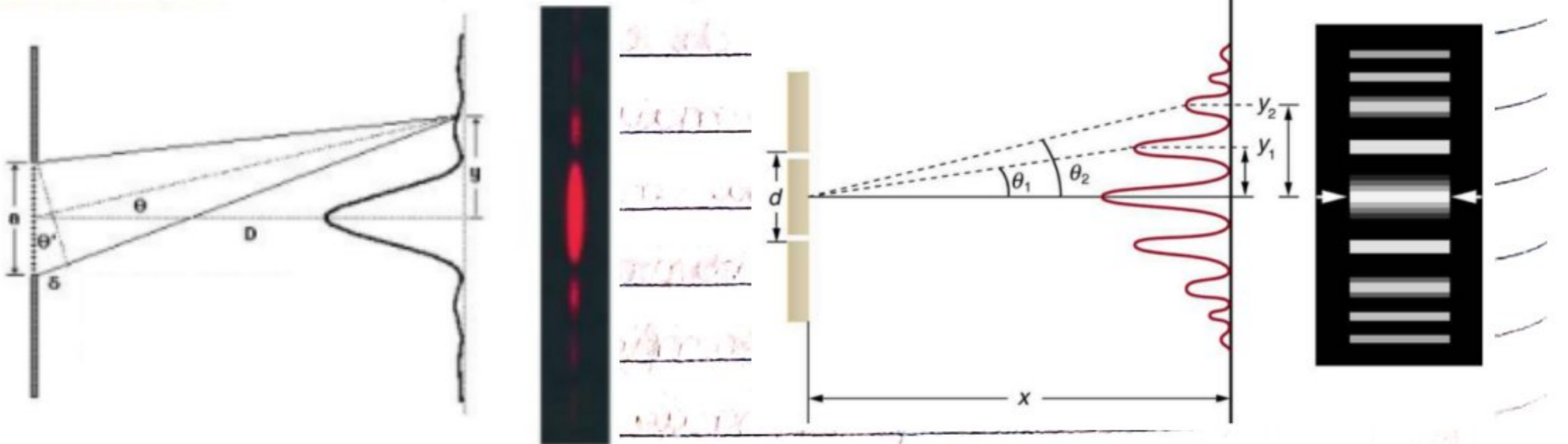
crystal de grafite e os d_1 e d_2 ;

15. O padrão formado por um feixe de elétrons passando por algumas configurações distintas:

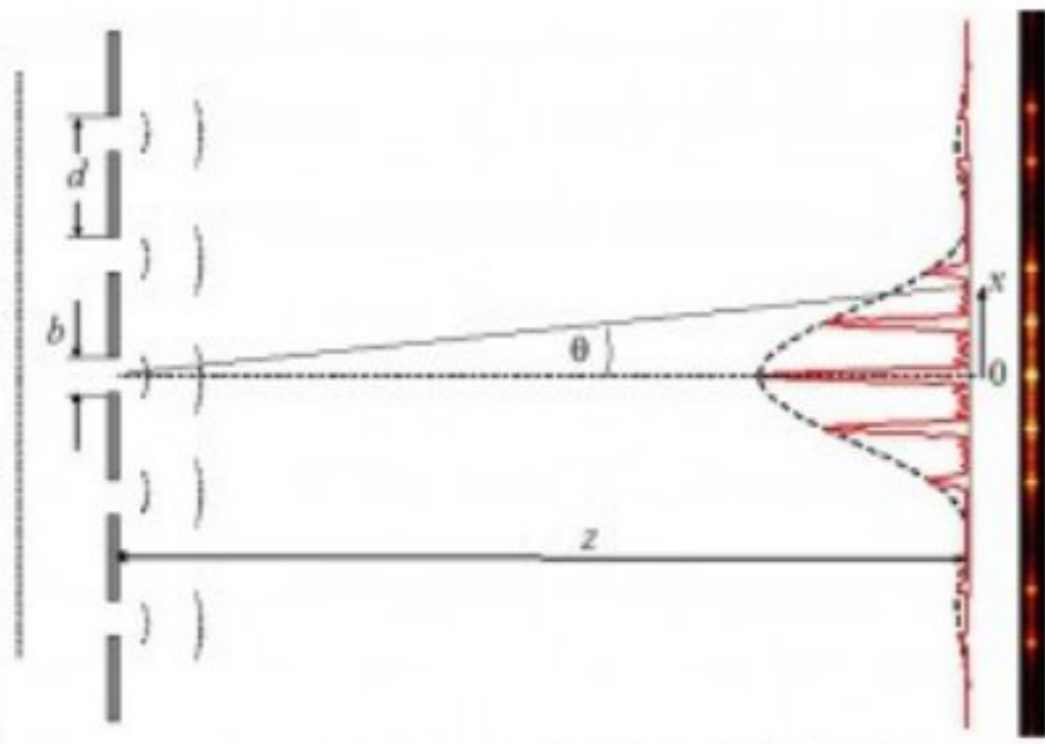
FIGURA 8:

a) FENDA ÚNICA

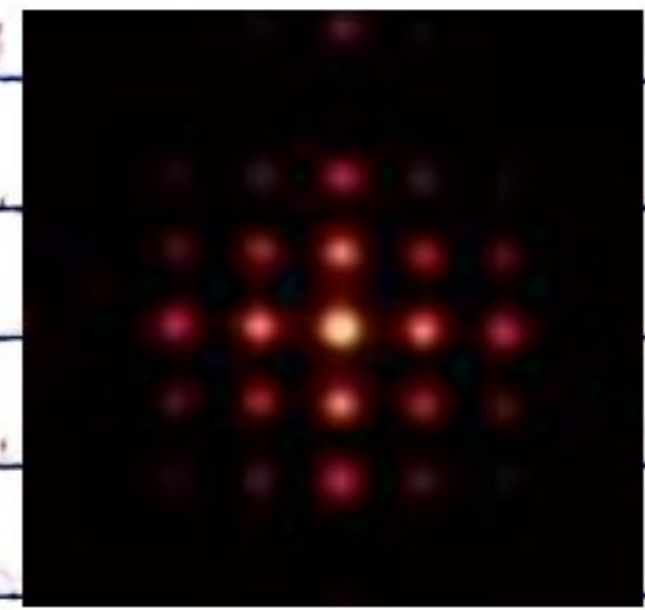
b) FENDA DUPLA



c) REDE DE RANHURAS



d) RANHURAS IGUALMENTE ESPAÇADAS



16. Quando o feixe de elétrons passa pelo plano interatômico, este feixe será difratado, formando um ângulo ψ ao atingir o polivital de grafite (vide figura 3). Considerando que a largura da "fenda" (que seria a distância interatômica d da figura) como Δy onde $\sin \psi = \lambda / \Delta y$. Como a propagação da onda governa o movimento da partícula associada, a figura de difração também nos fornece as probabilidades relativas que o elétron tem de alcançar diferentes pontos (que seriam diferentes valores de d). Embora o momento do elétron na direção y fosse inicialmente $p_y = 0$, por estar passando pelo plano interatômico o momento se torna impulsionado, logo:

$$\Delta p_y \cong p_y = p \sin \psi = \frac{p \lambda}{\Delta y}$$

Pela relação de de Broglie $p = \frac{h}{\lambda}$, assim: $\Delta p_y = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\Delta y}$

$\therefore \Delta p_y \Delta y = h$, que está de acordo com o limite fixado pelo princípio da incerteza.

17. É possível compreender o fator 2 da lei de Bragg pela figura 4, onde há dois caminhos percorridos pelo feixe, sendo o primeiro o zero do raio incidente mais o seno do raio difratado, para que fosse possível que as ondas estivessem em fase.

18. Nas fendas simples ou duplas o padrão de raios ocorre devido a existência dos fenômenos de difração e interferência nas ondas, sendo que a raia mais clara corresponde a interferência construtiva e a mais escura corresponde a interferência destrutiva. Ademais, o mesmo ocorre para os edifícios circulares, os quais possuem esse formato devido a fenda por qual o feixe foi difratado.

CONCLUSÃO

O procedimento experimental pode ser estudado de forma satisfatória, desde que o experimento de difração de elétrons nos permitiu determinar os valores dos espaçamentos intratômicos do grafite, obtendo valores próximos ao esperado e com muita precisão, mesmo o experimento sendo reutilizado ao erro na determinação da distância do alvo até a tela.

REFERÊNCIAS

[1] Concepts of Modern Physics - Arthur Beiser; edição 2003, cap. 3 / pág. 93;

[2] Física Quântica - Eisberg, R e Resnick, R; cap. 3;

[3] [www.sites.poli.usp.br/estrutura dos solidos](http://www.sites.poli.usp.br/estrutura%20dos%20solidos) < acessado em 15/10/2020 >;

[4] Artigos: < Estrutura do cristal; Carbono; > disponibilizados no e disciplinas;

REFERÊNCIAS

[1] Concepts of Modern Physics - Arthur Beiser; edição 2003, cap. 3 / pág. 93;

[2] Física Quântica - Eisberg, R e Resnick, R; cap. 3;

[3] www.sites.poli.usp.br/estrutura_dos_solidos < acessado em 15/10/2020 >;

[4] Artigos: < Estrutura do cristal; Carbonos; > disponibilizados nas disciplinas;

* Algumas anotações e/ou correções:

1. No experimento, a tensão de aceleração é limitada em 4kV.

Da equação (II) podemos ter que:

$$v_f^2 = \frac{2eV_f}{m} = \frac{2 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot (4 \cdot 10^3)}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 1,4 \cdot 10^{15} \text{ m/s}$$

Substituindo esse valor na equação de Einstein:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(9,1 \cdot 10^{-31})(3 \cdot 10^8)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{1,4 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^8}\right)^2}}$$

$$E = 8,27 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Isso acontece:

$$E = m_0 c^2 = (9,1 \cdot 10^{-31})(3 \cdot 10^8)^2 = 8,19 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Se, fazendo um teste relativo entre os valores, obtemos 0,98% de diferença entre eles, podendo desconsiderar o efeito relativístico.

→ Quanto maior for o n de reflexões, maior serão os ângulos ψ (vide figura 3), porém como temos um espaço limitado devido ao tamanho da tela do tubo, não é possível visualizar muitos anéis de interferência. Ademais, esses "círculos" só são possíveis devido a caracterização do grafite, que é um policristal. E, quanto menor for a intensidade dos "círculos", menos planos estão difratando naquela direção.