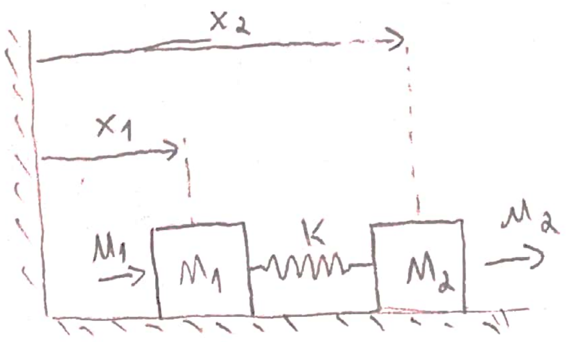
Leonardo Faria de Oliveira - 10706131

PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exercícios Aula 01/10



Temos que:

$$x_G = \bar{x} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M}$$

$$\delta = x_1 - x_2$$

Também temos, para o sistema dinâmico: $\ddot{\bar{x}} = \dfrac{u_1 + u_2}{M}$

$$\ddot{\delta} = \frac{u_1}{M_1} - \frac{u_2}{M_2} - \frac{KM\delta}{M_1 M_2}$$

Para essas equações, temos os vetores:

$z = [\bar{x}, \delta, \dot{\bar{x}}, \dot{\delta}]^T \Rightarrow \dot{z} = [\dot{\bar{x}}, \dot{\delta}, \ddot{\bar{x}}, \ddot{\delta}]^T$ e o vetor de entrada $u = [u_1, u_2]^T$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \delta \\ \ddot{\bar{x}} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{KM}{M_1 M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \\ \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M_1} & -\frac{1}{M_2} \end{bmatrix}}_{\bar{B}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\dot{z} = \bar{A} z + \bar{B} u}$$

Também temos o vetor $y = [x_1, x_2]^T$, e sabemos escrever $[\bar{x}, \delta]$ a partir dele.

Buscamos o contrário, escrever y a partir do vetor de estados:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{m} & \frac{m_2}{m} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{m_1}{m} & \frac{m_2}{m} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{-\left(\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m}\right)}}_{-1} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{m_2}{m} \\ -1 & \frac{m_1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{m_2}{m} \\ 1 & -\frac{m_1}{m} \end{bmatrix}$$

Escrevendo conforme queríamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{m_2}{m} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{m_1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \\ \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y = \bar{C} z}$$