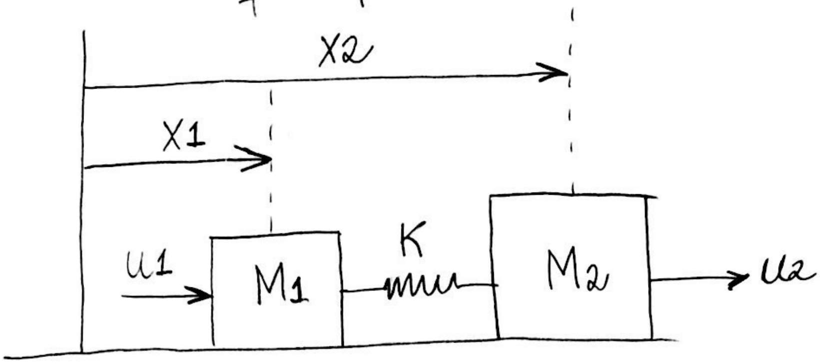
PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exercício Aula 01/10/2020

Arthur Henrique Gomes de Pinho Nº USP: 10379756



Define-se a partir do sistema:

$$\begin{cases} \bar{x} = x_G = \dfrac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \dfrac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M} \\ \delta = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Equações do Sistema Dinâmico:

$$\ddot{\bar{x}} = \frac{u_1 + u_2}{M}$$

$$\ddot{\delta} = \frac{-KM}{M_1 M_2}\delta + \frac{u_1}{M_1} - \frac{u_2}{M_2}$$

vetor de Estados $\rightarrow z = [\bar{x} \;\; \delta \;\; \dot{\bar{x}} \;\; \dot{\delta}]^T$

$$\dot{z} = [\dot{\bar{x}} \;\; \dot{\delta} \;\; \ddot{\bar{x}} \;\; \ddot{\delta}]^T$$

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \rightarrow$ vetor de entradas

Escrevendo em Espaço de Estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\bar{x}} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{KM}{M_1M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \\ \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/M & 1/M \\ 1/M_1 & -1/M_2 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u}$. O Produto entre matrizes e vetores retorna as equações conhecidas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\bar{x}} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \\ \frac{u_1}{M} + \frac{u_2}{M} \\ -\frac{KM\delta}{M_1M_2} + \frac{u_1}{M_1} - \frac{u_2}{M_2} \end{bmatrix}$$

Além disso, para $y = [x_1 \ x_2]^T$, deve-se escrever x_1 e x_2 em função de δ e $\bar{x}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{M_1}{M} & \frac{M_2}{M} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$P^{-1} \rightarrow$ Matriz de mudança de coordenadas

Para obter $P = (P^{-1})^{-1}$:

$$P = \frac{1}{-\frac{M_1}{M} - \frac{M_2}{M}} \begin{bmatrix} -1 & -M_2/M \\ -1 & M_1/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & M_2/M \\ 1 & -M_1/M \end{bmatrix}$$

Dessa forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & M_2/M \\ 1 & -M_1/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \end{bmatrix}$$

Escrevendo em função do vetor de Estados:

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & M_2/M & 0 & 0 \\ 1 & -M_1/M & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \\ \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y = \bar{C} z}$$

Por fim:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{z} = \bar{A} z + \bar{B} u \\ y = \bar{C} z \end{cases}}$$