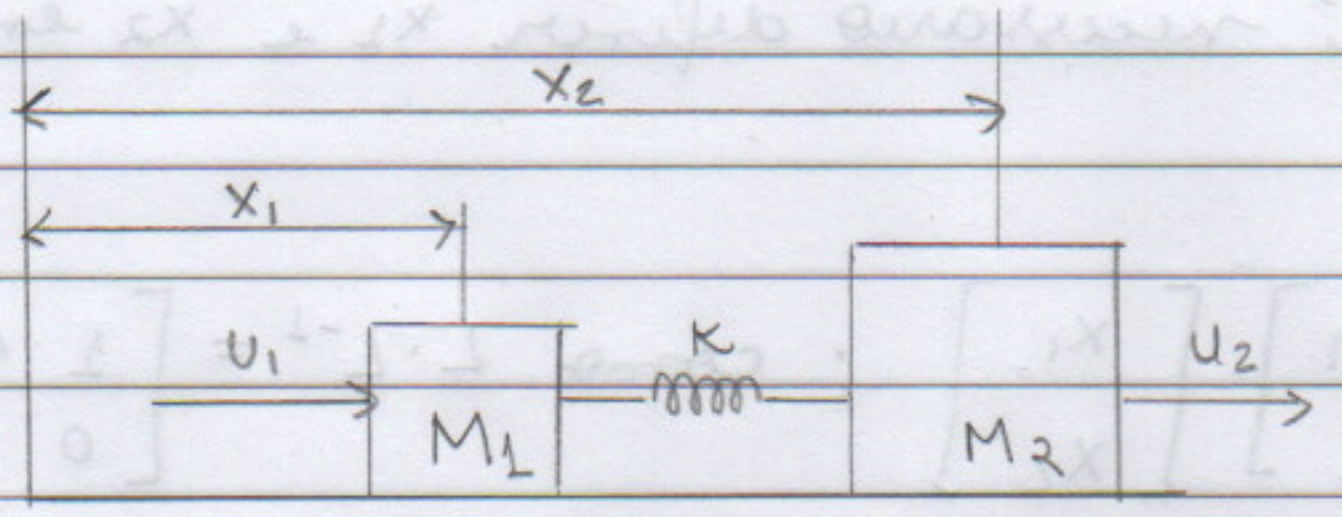
EXERCÍCIO DA AULA 01/10/2020

Gabriela Vasconcelos Araújo - 10771497



Movimento do sistema a partir do movimento do centro de massa

$$x_G = \bar{X} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M}$$

$$\delta = x_1 - x_2 \Rightarrow \ddot{\delta} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$$

Aplicando a 1ª lei:

$$\left.\begin{array}{lcl} u_1 + u_2 = M\ddot{\bar{X}} & & \ddot{\bar{X}} = \dfrac{u_1 + u_2}{M} \\ u_2 + K(x_2 - x_1) = M_2 \ddot{x}_2 & \Rightarrow & \\ u_1 - K(x_2 - x_1) = M_1 \ddot{x}_1 & & \ddot{\delta} = \dfrac{u_1}{M_1} - \dfrac{u_2}{M_2} - \dfrac{KM\delta}{M_1 M_2} \end{array}\right\} \text{sistema dinâmico}$$

Definindo os vetores:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \delta \\ \dot{\bar{X}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \qquad \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{X}} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\bar{X}} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix}$$

Definindo o espaço de estados:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{X}} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\bar{X}} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix}}_{\dot{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-KM}{M_1 M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \delta \\ \dot{\bar{X}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}}_{z} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/M & 1/M \\ 1/M_1 & -1/M_2 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{u}$$

$\therefore \quad \dot{z} = Az + Bu$

Para $y = [x_1 \quad x_2]^t$, é necessário definir x_1 e x_2 em função de δ e $\bar{x}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_1/M & M_2/M \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{L^{-1}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ; \text{ como } L \cdot L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} :$$

$$L = \begin{bmatrix} M/M_1+M_2 & M_2/M \\ M/M_1+M_2 & -M_1/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & M_2/M \\ 1 & -M_1/M \end{bmatrix}$$

$$y = L \cdot [\bar{x} \ \delta] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & M_2/M \\ 1 & -M_1/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \end{bmatrix}$$

Em função do vetor de estados:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & M_2/M & 0 & 0 \\ 1 & -M_1/M & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \\ \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} y = Cz \\ \dot{z} = Az + Bu \end{cases}$$

com A, B e C definidas e iguais às do enunciado