PME 3380 - Modelagem dos Sistemas Dinâmicos
Exercício da Aula 29/09/2020
Arthur H. Gomes de Pinho Nº USP: 10379756

Ex. 2

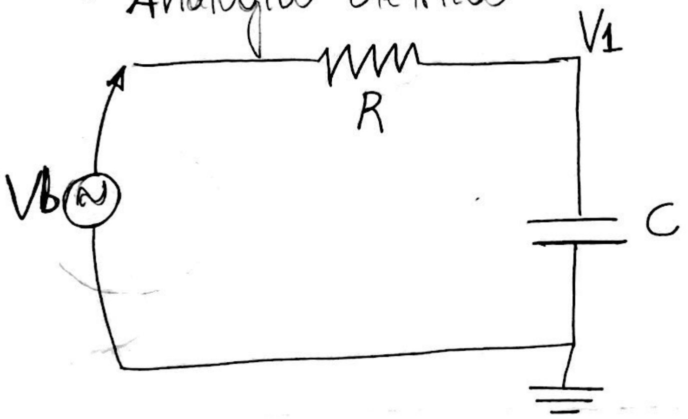
Desprezando a influência e fazendo um balanço de energia, tem-se:

$$q_1 = q_2 \rightarrow C_m \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_b - \theta}{R_m} \rightarrow \boxed{C_m \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R_m} = \frac{\theta_b}{R_m}}$$

Sabe-se que $\tau_m = R_m . C_m$, logo:

$$\boxed{\tau_m \dot{\theta} + \theta = \theta_b}$$

- Analogia Elétrica



Pelo método prático, tem-se:

$$V_1\left(CD + \frac{1}{R}\right) - V \cdot \frac{1}{R} = 0$$

Fazendo $V_1 \rightarrow \theta$ e $V \rightarrow \theta_b$, com $C \rightarrow C_m$ e $R \rightarrow R_m$, obtém-se por analogia:

$$\theta\left(C_m D + \frac{1}{R_m}\right) - \frac{\theta_b}{R_m} = 0$$

Assim,

$$\boxed{C_m \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{R_m}\theta = \frac{\theta_b}{R_m}}$$

Incluindo o termo $\tau_m = R_m . C_m$

$$\boxed{\tau_m \dot{\theta} + \theta = \theta_b}$$

Ex3. Eliminando as hipóteses simplificadoras, considerando agora a influência do vidro

- Balanço de Energia

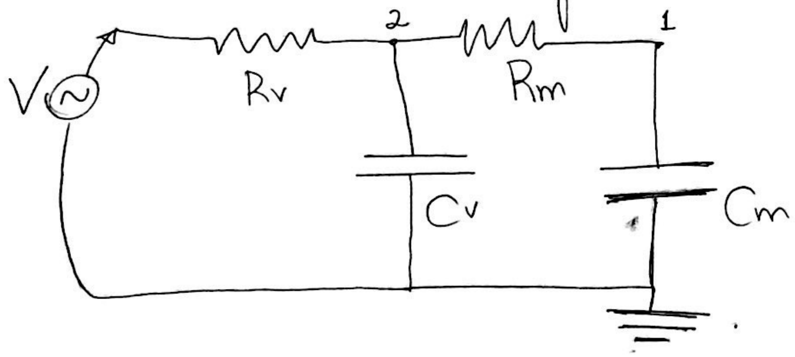
Mercúrio

$$C_m \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_v - \theta}{R_m} \rightarrow \boxed{C_m \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R_m} = \frac{\theta_v}{R_m}}$$

Vidro

$$C_v \frac{d\theta_v}{dt} = \frac{\theta_b - \theta_v}{R_v} - \frac{\theta_v - \theta}{R_m} \rightarrow \boxed{C_v \frac{d\theta_v}{dt} + \left(\frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_m}\right)\theta_v = \frac{\theta_b}{R_v} + \frac{\theta}{R_m}}$$

- Circuito Elétrico Análogo



Pelo método prático:

$$V_1\left(C_m D + \frac{1}{R_m}\right) - \frac{1}{R_m} V_2 = 0$$

$$\theta\left(C_m D + \frac{1}{R_m}\right) - \theta_v \frac{1}{R_m} = 0$$

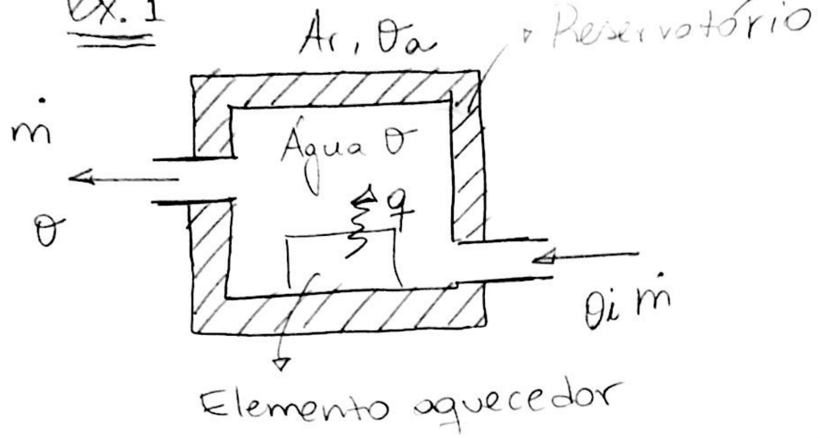
$$\boxed{C_m \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R_m} = \frac{\theta_v}{R_m}}$$

$$V_2\left(C_v D + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_v}\right) - V_1 \frac{1}{R_m} - V \frac{1}{R_v} = 0$$

$$\theta_v\left(C_v D + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_v}\right) - \theta \frac{1}{R_m} - \theta_b \frac{1}{R_v} = 0$$

$$\boxed{C_v \frac{d\theta_v}{dt} + \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_v}\right)\theta_v = \frac{\theta_b}{R_v} + \frac{\theta}{R_m}}$$

Ex. 1



1. Usando a 1ª Lei da Termodinâmica para o Sistema, desprezando os termos potenciais e cinéticos, tem-se:

$$Mc_p \frac{d\theta}{dt} = q_{in} - q_{out} + q_g + \cancel{\frac{dZ}{dt}}^{\,0} \text{ Sem trabalho}$$

$q_g = q \rightarrow$ Gerado pela resist térmica

$$q_{out} = \frac{\theta - \theta_i}{R}$$

$$q_{in} \approx \dot{m} c_p (\theta_i - \theta)$$

$$\downarrow$$

$$Mc_p \frac{d\theta}{dt} = \dot{m} c_p (\theta_i - \theta) - \frac{\theta - \theta_i}{R} + q(t)$$

$$\boxed{Mc_p \dot{\theta} + \left(\dot{m} C_p + \frac{1}{R}\right)\theta = \left(\dot{m} c_p + \frac{1}{R}\right)\theta_i + q(t)}$$

2. Analogia Tipo 2: $\theta \rightarrow V$, $q \rightarrow i$

$C_f = \dot{m} C_p$

$C_t = M C_p$

Pelo método prático:

$$V\left(C_t D + C_f + \frac{1}{R}\right) - V_i\left(C_f + \frac{1}{R}\right) = i(t)$$

Pela analogia

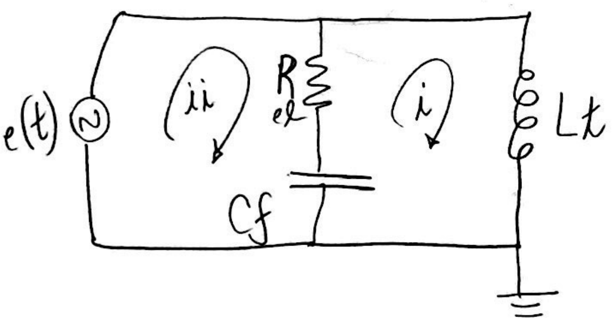
$$\theta\left(C_t D + C_f + \frac{1}{R}\right) - \theta_i\left(C_f + \frac{1}{R}\right) = q(t)$$

$$C_t\dot{\theta} + \left(C_f + \frac{1}{R}\right)\theta = q(t) + \left(C_f + \frac{1}{R}\right)\theta_i$$

$$\boxed{M C_p \dot{\theta} + \left(\dot{m} C_p + \frac{1}{R}\right)\theta = q(t) + \left(\dot{m} C_p + \frac{1}{R}\right)\theta_i}$$

Analogia Tipo 1: $q \to V_i$; $\theta \to i$

Circuito Elétrico Equivalente:



$L_t \to M C_p$

$C_f \to \dot{m} C_p$

$R_{el} \to 1/R$

$$L_t D i + (R_{el} + C_f)(i - i_i) = e(t)$$

$$\downarrow$$

$$C_t D\theta + \left(\frac{1}{R} + C_f\right)\theta = q(t) + \left(\frac{1}{R} + C_f\right)\theta_i$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M C_p \frac{d\theta}{dt} + \left(\dot{m} c_p + \frac{1}{R}\right)\theta = q(t) + \left(\dot{m} c_p + \frac{1}{R}\right)\theta_i}$$