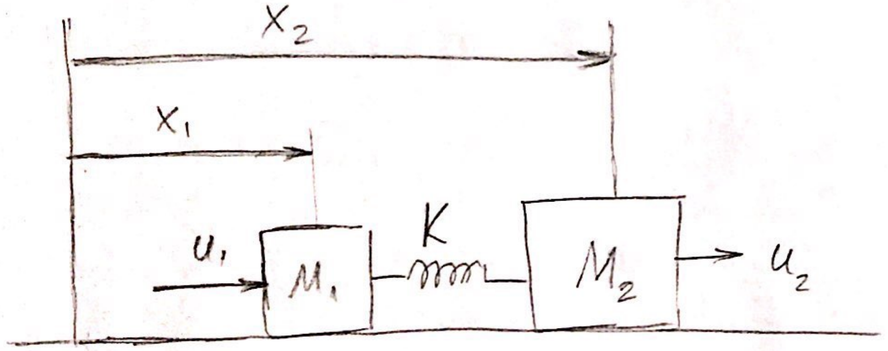
Lucas Souza Vieira   Nº USP: 10772863

PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exercícios da aula 01/10/2020



Definem-se:
$$\begin{cases} \bar{x} = x_G = \dfrac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \dfrac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M} \\ \delta = x_1 - x_2 \end{cases}$$

As equações do sistema dinâmico são:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} = \dfrac{u_1 + u_2}{M} \\ \ddot{\delta} = -\dfrac{KM}{M_1 M_2}\delta + \dfrac{u_1}{M_1} - \dfrac{u_2}{M_2} \end{cases}$$

Define-se o vetor de estados: $z = [\bar{x} \;\; \delta \;\; \dot{\bar{x}} \;\; \dot{\delta}]^T$

Desta forma: $\dot{z} = [\dot{\bar{x}} \;\; \dot{\delta} \;\; \ddot{\bar{x}} \;\; \ddot{\delta}]^T$

Além disso: $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ Vetor de entradas

Scanned with CamScanner

Escrevendo em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\bar{x}} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{KM}{M_1 M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \\ \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M_1} & -\frac{1}{M_2} \end{bmatrix}}_{\bar{B}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Desta forma: $\boxed{\dot{z} = \bar{A} z + \bar{B} u}$, com $\bar{A}$ e $\bar{B}$ definidos como acima. O produto entre matrizes e vetores retorna às equações conhecidas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\bar{x}} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\delta} \\ \frac{u_1}{M} + \frac{u_2}{M} \\ -\frac{KM}{M_1 M_2}\dot{\delta} + \frac{u_1}{M_1} - \frac{u_2}{M_2} \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Além disso, para $y = [x_1 \ \ x_2]^T$, devemos escrever x_1 e x_2 em função de δ e $\bar{x}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{M_1}{M} & \frac{M_2}{M} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$P^{-1} \Rightarrow$ Matriz de mudança de coordenadas

Queremos obter $P = (P^{-1})^{-1}$:

$$P = \frac{1}{-\frac{M_1}{M} - \frac{M_2}{M}} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{M_2}{M} \\ -1 & \frac{M_1}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{M_2}{M} \\ 1 & -\frac{M_1}{M} \end{bmatrix}$$

Desta forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{M_2}{M} \\ 1 & -\frac{M_1}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \delta \end{bmatrix}$$

Escrevendo em função do vetor de estados:

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{M_2}{M} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{M_1}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \delta \\ \dot{\bar{X}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

Assim: $\boxed{y = \bar{C} z}$, com $\bar{C}$ definido como acima.

Finalmente: $\boxed{\begin{cases} \dot{z} = \bar{A} z + \bar{B} u \\ y = \bar{C} z \end{cases}}$, sendo as matrizes $\bar{A}$, $\bar{B}$ e $\bar{C}$ como as do enunciado.

Scanned with CamScanner