



**Modelagem de um Drone Quadrimotor**  
**Disciplina: PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos**

Professores: Décio Crisol Donha/Agenor de Toledo Fleury

Grupo: Nicolle Ferreira Hyppolito - n°USP: 10823452

Ricardo Dovidio Libertucci - n°USP: 9270162

Rudson Guilherme Pires Camargo – n°USP: 10772456

Vitoria Menino Campos - n°USP: 10874175

São Paulo 2020

## Introdução

O uso de drones vem crescendo em importância nos últimos anos conforme são descobertas novas aplicações para os quadricópteros geralmente ligadas ao transporte de produtos ou à geração de imagens de determinadas áreas.

Por exemplo, na área médica já foram usados para o transporte de kits de primeiros socorros para pessoas em situações de emergência. Também já existem serviços de entrega de encomendas feitos por drones, inclusive autorizados no Brasil pela Agência Nacional de Aviação Civil (Anac).

A redução no custo de produção desse tipo de veículo está fazendo com que ele ganhe cada vez mais atenção e os usos que estão sendo encontrados se mostram muitas vezes mais eficientes que os meios comuns por conta da capacidade dos drones de transportar pequenas cargas rapidamente. Outro ponto é que a capacidade de capturar imagens de vários pontos de vista faz com que eles sejam usados, aliados de câmeras de alta resolução, para a geração de mapas de áreas que podem ter aplicações desde fiscalização ambiental até para a agricultura.

Olhando as aplicações possíveis para esse tipo de veículo aéreo não tripulado (VANT), pode-se perceber a importância de modelar seu funcionamento com fim de aprimorar o controle deles, já que todas as suas aplicações dependem diretamente da precisão com que eles podem ser controlados.

## Modelo dinâmico

Para que se obtenha o equacionamento do dispositivo, é definido, primeiramente, a relação entre o sistema de coordenada móvel e o fixo, ambos representados na figura 1. Para isso, utilizando os ângulos de Euler pelo método de convenção z-y-x, temos:

1. Matriz rotação em torno do eixo z:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix}$$

2. Matriz rotação em torno do eixo y:

$$\begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

3. Matriz rotação em torno de eixo x:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix}$$

Sendo assim, multiplicando as matrizes rotações em torno do eixo z, y e x, respectivamente, ficamos com a seguinte matriz transformação:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \cos \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix}$$

Considerando o quadricóptero como um corpo livre no espaço, sob a ação de forças e torques externos, como esquematizado a seguir:

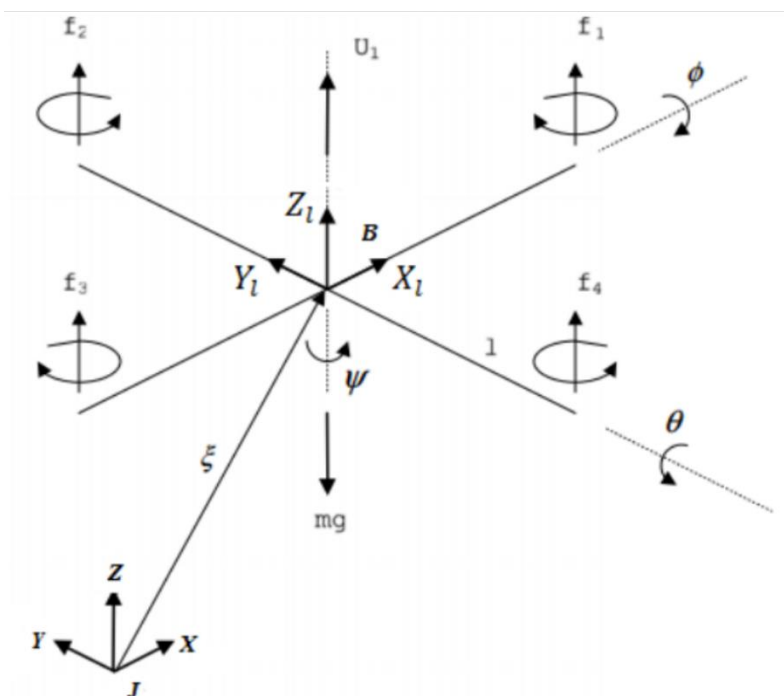


Figura 1- Sistemas de coordenadas e forças agindo em um quadricóptero

No sistema de coordenadas do dispositivo temos um componente de força resultante,  $F_z$ , na direção do eixo  $Z_L$ . Essa força é a somatória das forças exercidas em cada rotor. A força gravitacional é paralela ao eixo fixo  $Z$ , para somar a somatório de forças com a força gravitacional é necessário utilizar a matriz transformação:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \cos \phi \\ \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{bmatrix}$$

Feito isso, somando com força gravitacional e aplicando a Segunda Lei de Newton, ficamos com:

$$m \cdot \ddot{x} = F_z (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \cos \phi) - C_1 \dot{x}$$

$$m \cdot \ddot{y} = F_z (\sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \cos \phi) - C_2 \dot{y}$$

$$m \cdot \ddot{z} = F_z \cos \theta \cos \phi - mg - C_3 \dot{z}$$

Analogamente com a Segunda Lei de Newton, temos para o toque:

$$I_x \cdot \ddot{\phi} = l \cdot (F_3 - F_1 - C_1 \dot{\phi})$$

$$I_y \cdot \ddot{\theta} = l \cdot (F_4 - F_2 - C_2 \dot{\theta})$$

$$I_z \cdot \ddot{\psi} = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 - C_2 \dot{\psi}$$

Para ambos sistemas de equações, são considerados os coeficientes de perdas C, que para baixas velocidades podem ser desprezados.

## Referências

Beal, G; Eckhard, D. MODELAGEM DINÂMICA DE VEÍCULOS AÉREOS NÃO TRIPULADOS (VANTS). 2018.

Cavallaro, S. MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM VANT DO TIPO QUADRICÓPTERO. 2019.

Lima, G; Souza, R; Moraes, A; Moraes, Josué. MODELAGEM DINÂMICA DE UM VEÍCULO AÉREO NÃO TRIPULADO DO TIPO QUADRICÓPTERO. 2014.

Medke, R. MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM QUADROTOR. 2016.

Saldanha, R. CONTROLE DE ALTITUDE E ALTURA DE UM QUADRICÓPTERO UTILIZANDO TÉCNICAS DE CONTROLE PID. 2019.

Silva, M. MODELAGEM DINÂMICA, IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS E CONTROLE DE UM VEÍCULO AÉREO NÃO TRIPULADO DO TIPO QUADRICÓPTERO. 2015.

Raptis, I; Valavanis, K. LINEAR AND NONLINEAR CONTROL OF SMALL-SCALE UNMANNED ROTORCRAFT. 2010.