

Cássio Murakami  
Gabriel Barbosa Paganini  
Henrique Kuhlmann  
João Otávio Tanaka de Oliveira

**PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos**  
**Proposta de trabalho T0**

São Paulo, Brasil

2020

# 1 Introdução ao problema

Nos dias atuais, a vida dos seres humanos é muito dependente dos meios de telecomunicação e, principalmente, da internet. Para que toda a infraestrutura de comunicação mundial opere nominalmente, é fundamental o papel dos satélites artificiais. Inúmeros serviços, considerados casuais para boa parte da população brasileira, só são possíveis graças a eles, como o *GPS*, internet, chamadas telefônicas, televisão, entre outros.

Entretanto, a fim de possibilitar que os satélites funcionem perfeitamente, é essencial que eles estejam orientados na atitude correta, ou seja, que eles apontem para o local exigido (SHRIVASTAVA; MODI, 1983). Por exemplo, para que um satélite telescópio obtenha uma imagem com precisão, é necessário que ele observe o mesmo local do céu noturno ao passar em determinado ponto de sua órbita. Outro exemplo é descrito em "Manobras orbitais de satélites artificiais lunares com aplicação de propulsão contínua" (GONÇALVES, 2013), mostrando a aplicação de satélites em órbitas lunares. Logo, é necessário um rígido e preciso sistema de controle da atitude e rotação do satélite.

Em adição, como descrito em "Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais" (CABETTE, 2006), vários são os fatores que influenciam na atitude dos ângulos do satélite, como o torque do gradiente da gravidade sobre o corpo. Entretanto, é possível separar os movimentos de translação e rotação do satélite e tratá-los como movimentos totalmente independentes. Logo, este trabalho terá como objetivo a modelagem da estabilização rotacional de um satélite em torno de um ponto definido por ângulos de Euler (HENDERSON, 1977) por meio da aplicação de pequenos torques em relação aos eixos principais de inércia (figura 1), desprezando-se os efeitos da translação e de forças externas.

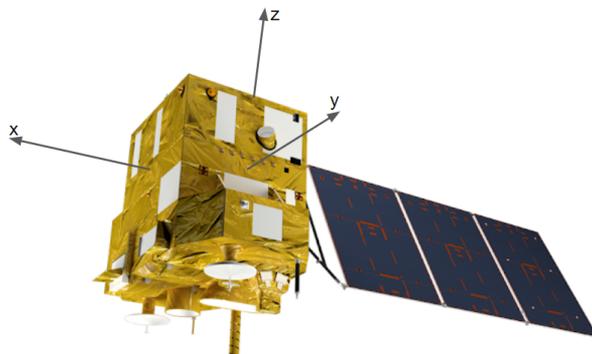


Figura 1 – Satélite brasileiro 'CBERS 4' com os eixos principais de inércia evidenciados.  
Fonte: (INPE, 2020)

## 2 Modelo dinâmico

Aplicando o teorema do momento da quantidade de movimento (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001) e considerando o centro de massa do satélite como polo, o seguinte sistema de equações diferenciais é obtido para a evolução temporal das componentes do vetor rotação instantânea na base do eixo móvel.

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x = (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ I_y \dot{\omega}_y = (I_z - I_x) \omega_x \omega_z \\ I_z \dot{\omega}_z = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{cases} \quad (2.1)$$

O conjunto de ângulos de Euler escolhido é o relativo a uma rotação Z - X - Z' representada na figura abaixo:

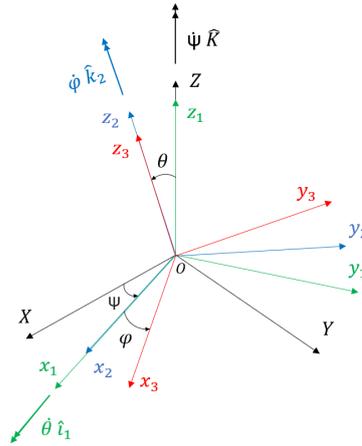


Figura 2 – Ângulos de Euler. Fonte: (Autores)

As matrizes de rotação correspondentes a cada passo das mudanças de base podem ser obtidas a partir da matriz dos cossenos diretores referentes a tal transformação

- Precessão ( $\psi$ ):  $O_{XYZ} \rightarrow O_{x_1 y_1 z_1}$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I} \cdot \hat{i}_1 & \hat{J} \cdot \hat{i}_1 & \hat{K} \cdot \hat{i}_1 \\ \hat{I} \cdot \hat{j}_1 & \hat{J} \cdot \hat{j}_1 & \hat{K} \cdot \hat{j}_1 \\ \hat{I} \cdot \hat{k}_1 & \hat{J} \cdot \hat{k}_1 & \hat{K} \cdot \hat{k}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

- Nutação ( $\theta$ ):  $O_{x_1y_1z_1} \rightarrow O_{x_2y_2z_2}$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2 & \hat{j}_1 \cdot \hat{i}_2 & \hat{k}_1 \cdot \hat{i}_2 \\ \hat{i}_1 \cdot \hat{j}_2 & \hat{j}_1 \cdot \hat{j}_2 & \hat{k}_1 \cdot \hat{j}_2 \\ \hat{i}_1 \cdot \hat{k}_2 & \hat{j}_1 \cdot \hat{k}_2 & \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k}_1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

- Rotação própria ( $\varphi$ ):  $O_{x_2y_2z_2} \rightarrow O_{x_3y_3z_3}$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_3 \\ \hat{j}_3 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_2 \cdot \hat{i}_3 & \hat{j}_2 \cdot \hat{i}_3 & \hat{k}_2 \cdot \hat{i}_3 \\ \hat{i}_2 \cdot \hat{j}_3 & \hat{j}_2 \cdot \hat{j}_3 & \hat{k}_2 \cdot \hat{j}_3 \\ \hat{i}_2 \cdot \hat{k}_3 & \hat{j}_2 \cdot \hat{k}_3 & \hat{k}_2 \cdot \hat{k}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ao escrever o vetor rotação instantânea em função dos ângulos de Euler:

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \hat{i}_3 + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \hat{j}_3 + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \hat{k}_3 \quad (2.5)$$

Substituindo os termos do vetor rotação instantânea em função dos ângulos de Euler 2.5 no sistema do teorema do momento da quantidade de movimento 2.1 e manipulando algebricamente as expressões obtidas:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \sin \varphi \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) \left( \dot{\psi} \cot \theta + \frac{\dot{\varphi}}{\sin \theta} \right) (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) + \frac{\dot{\theta} \dot{\varphi}}{\sin \theta} + \dots \\ &+ \cos \varphi \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) \left( \dot{\psi} \cot \theta + \frac{\dot{\varphi}}{\sin \theta} \right) (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) - \dot{\psi} \dot{\theta} \cot \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta + \cos \varphi \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) + \dots \\ &- \sin \varphi \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\sin \varphi \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) (\dot{\psi} \cot \theta \cos \theta + \dot{\varphi} \cot \theta) + \dots \\ &- \cos \varphi \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) (\dot{\psi} \cot \theta \cos \theta + \dot{\varphi} \cot \theta) + \dots \\ &+ \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) + \dots \\ &+ \dot{\psi} \dot{\theta} \cot \theta \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\varphi} \cot \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 3 Linearização

Para a análise do sistema de equações (2.6), (2.7) e (2.8) dos ângulos de Euler do problema em questão, faremos a linearização do mesmo em torno de um ponto genérico. Com base no programa *open source* Mathematica, encontraram-se as equações linearizadas de  $\ddot{\psi}$ ,  $\ddot{\theta}$  e  $\ddot{\varphi}$  em torno do ponto  $P = (\psi_0, \dot{\psi}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ . O código utilizado para tanto pode ser encontrado no apêndice.

Dessa maneira, o modelo dinâmico linearizado a partir do vetor de estados definido é da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\psi}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \psi(t) - \psi_0 \\ \dot{\psi}(t) - \dot{\psi}_0 \\ \theta(t) - \theta_0 \\ \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}_0 \\ \varphi(t) - \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}_0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Os coeficientes da matriz constante  $A$  são obtidos pelas derivadas parciais das equações (2.6), (2.7) e (2.6) em torno no ponto  $P$ , cujos valores são representados na equação (3.2):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \psi} & \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \theta} & \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \psi} & \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \psi} & \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \theta} & \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \dot{\varphi}} \end{bmatrix}_P \quad (3.2)$$

Através do código desenvolvido em *Mathematica*, é possível calcular a matriz (3.2) e demonstrar que, para a linearização em torno de um ponto genérico, seus elementos são não nulos. Em conclusão, o sistema (3.1) é linear e de sexta ordem.

Nos próximos passos, serão estudados as respostas dinâmicas do sistemas a perturbações, além de maneiras de controlar o sistema em torno dos pontos iniciais por meio de atuadores externos, como absorvedores dinâmicos ou impulsos instantâneos de gases frios por bocais.

## Apêndice A - Código de linearização

```

1 thetadoispontos=-d B Sin[a]+Cos[b] k1(d Sin[a] Cos[b]-A Sin[b]) (d Cos[a]+B)
  -Sin[b] k2 (d Sin[a] Sin[b]+ A Cos[b]) (d Cos[a]+B);
2
3 a1=D[thetadoispontos , a]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
4 a2=D[thetadoispontos , b]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
5 a3=D[thetadoispontos , c]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
6 a4=D[thetadoispontos , A]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
7 a5=D[thetadoispontos , B]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
8 a6=D[thetadoispontos , d]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
9
10 psidoispontos=Sin[b] k1 (d Cot[a]+B/Sin[a]) (d Sin[a] Cos[b]-A Sin[b])+A B/
  Sin[a]+k2 Cos[b] (d Cot[a]+B/Sin[a]) (d Sin[a] Sin[b]+A Cos[b])-d A Cot[a
  ];
11
12 b1=D[psidoispontos , a]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
13 b2=D[psidoispontos , b]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
14 b3=D[psidoispontos , c]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
15 b4=D[psidoispontos , A]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
16 b5=D[psidoispontos , B]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
17 b6=D[psidoispontos , d]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
18
19 phidoispontos=-Sin[b] k1 (d Sin[a] Cos[b]-A Sin[b]) (d Cot[a] Cos[a]+B Cot[a
  ])-Cos[b] k2 (d Sin[a] Sin[b]+ A Cos[b]) (d Cot[a] Cos[a]+B Cot[a])+k3(d
  Sin[a] Sin[b]+A Cos[b]) (d Sin[a] Cos[b]-A Sin[b])+d A Cot[a] Cos[a]-A B
  Cot[a]+d A Sin[a];
20
21 c1=D[phidoispontos , a]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
22 c2=D[phidoispontos , b]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
23 c3=D[phidoispontos , c]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
24 c4=D[phidoispontos , A]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
25 c5=D[phidoispontos , B]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
26 c6=D[phidoispontos , d]/. {a->a0 , b->b0 , c->c0 , d->d0 , A->A0 , B->B0 };
27
28 theta=a1(a-a0)+a2(b-b0)+a3(c-c0)+a4(A-A0)+a5(B-B0)+a6(d-d0);
29 Simplify[theta]
30
31 psi=b1(a-a0)+b2(b-b0)+b3(c-c0)+b4(A-A0)+b5(B-B0)+b6(d-d0);
32 Simplify[psi]
33
34 phi=c1(a-a0)+c2(b-b0)+c3(c-c0)+c4(A-A0)+c5(B-B0)+c6(d-d0);
35 Simplify[phi]

```

# Referências

- CABETTE, R. E. S. *Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais*. Tese (Doutorado) — Dissertação de doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São . . . , 2006. Citado na página 1.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics (3rd Edition)*. [S.l.: s.n.], 2001. 198-208 p. ISBN 0201657023. Citado na página 2.
- GONÇALVES, L. D. *Manobras Orbitais de Satélites Artificiais Lunares com Aplicação de Propulsão Contínua*. Tese (Doutorado) — dissertação (Mestrado em Mecânica Espacial e Controle)-Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2013. Citado na página 1.
- HENDERSON, D. Shuttle program. euler angles, quaternions, and transformation matrices working relationships. 1977. Citado na página 1.
- INPE. *Mosaico do Brasil com imagens CBERS-4 financiado pelo BNDES é disponibilizado pelo INPE*. 2020. Disponível em: <[http://www.cbers.inpe.br/noticias/noticia.php?Cod\\_Noticia=5544](http://www.cbers.inpe.br/noticias/noticia.php?Cod_Noticia=5544)>. Citado na página 1.
- SHRIVASTAVA, S.; MODI, V. Satellite attitude dynamics and control in the presence of environmental torques-a brief survey. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 6, n. 6, p. 461–471, 1983. Citado na página 1.