

Ítalo Gonçalves Sant'Ana Paiva 10853310

PME3380 - Modelagem
Lista D

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

Prof. Dr. Decio Crisol Donha

São Paulo

2020

Sumário

1	EXERCÍCIO 1	1
2	EXERCÍCIO 2	2
3	LIÇÃO 1	4
4	LIÇÃO 2	7
A	CÓDIGOS DE SIMULAÇÃO	8
A.0.1	Exercício 1	8
A.0.2	Exercício 2	9
A.0.3	Lição 1	9

1 Exercício 1

Faça as modificações adequadas para se poder desenhar e comparar os gráficos da resposta do sistema não linear e linear. Faça as simulações dos sistemas linear e não linear considerando que o reservatório parte do nível $h = 2$ m, mas com vazão de entrada nula. Compare as respostas.

A comparação entre o modelo linear e não linear foi realizada por meio do código em Scilab descrito em anexo que forneceu as imagens a seguir.

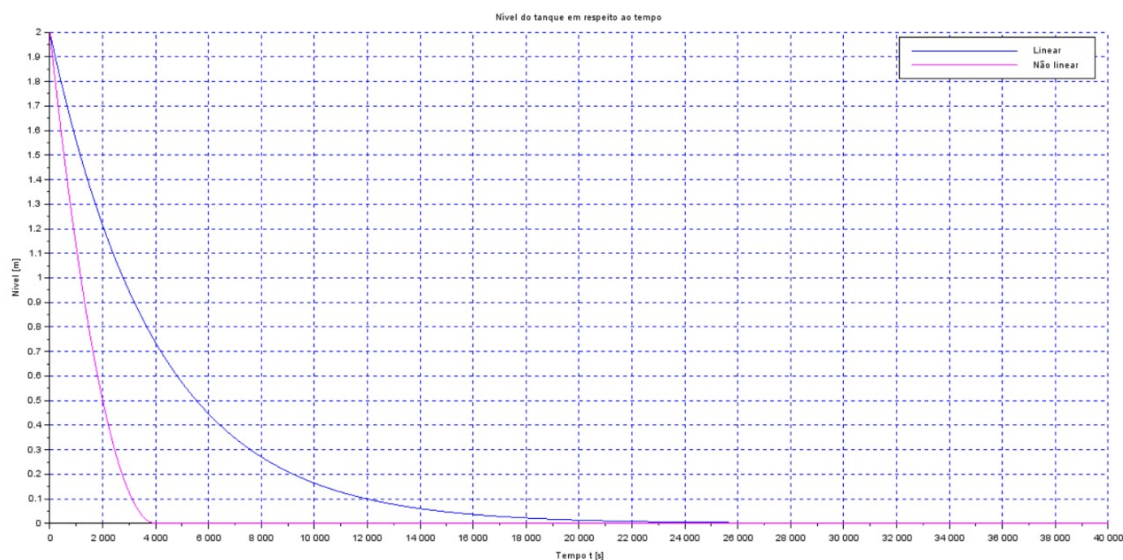


Figura 1 – Exercício 1 - Simulação

Dessa forma, evidencia-se que há grande proximidade entre os dois modelos comparados, de maneira a caracterizar a eficiência da linearização proposta.

2 Exercício 2

Obtenha o modelo matemático do circuito elétrico mostrado abaixo e compare com o modelo linear do sistema com um reservatório. Faça simulações e compare qualitativamente com os resultados do exercício 1 (sistema linear).

O sistema linearizado pode ser representado pelo circuito elétrico a seguir.

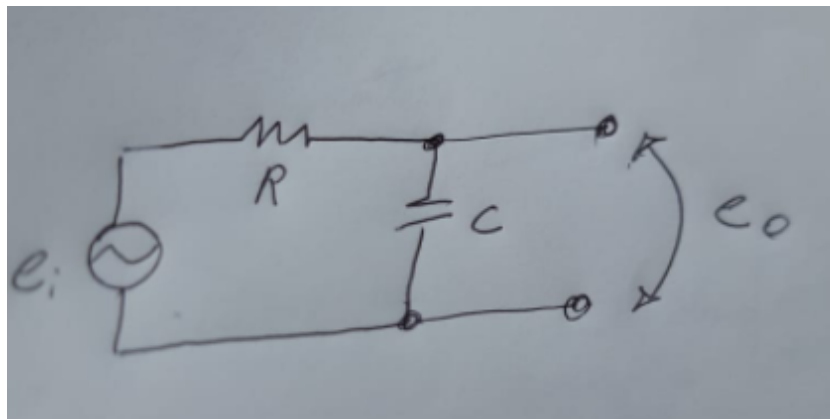


Figura 2 – Circuito equivalente.

Nesse sentido, ao aplicar a lei das malhas, podemos obter as equações:

$$i = \frac{1}{RC} \int i dt + e_i - e_o \quad (2.1)$$

- $R = 1$
- $i = dh$
- $e_i = \frac{Q_{ei}}{S}$
- $e_o = 0$
- $c = 2S \sqrt{\frac{R_a h_o}{g \rho}}$

A partir dessa analogia, é gerado o gráfico abaixo que evidencia a possibilidade de uma relação elétrica com o problema proposto.

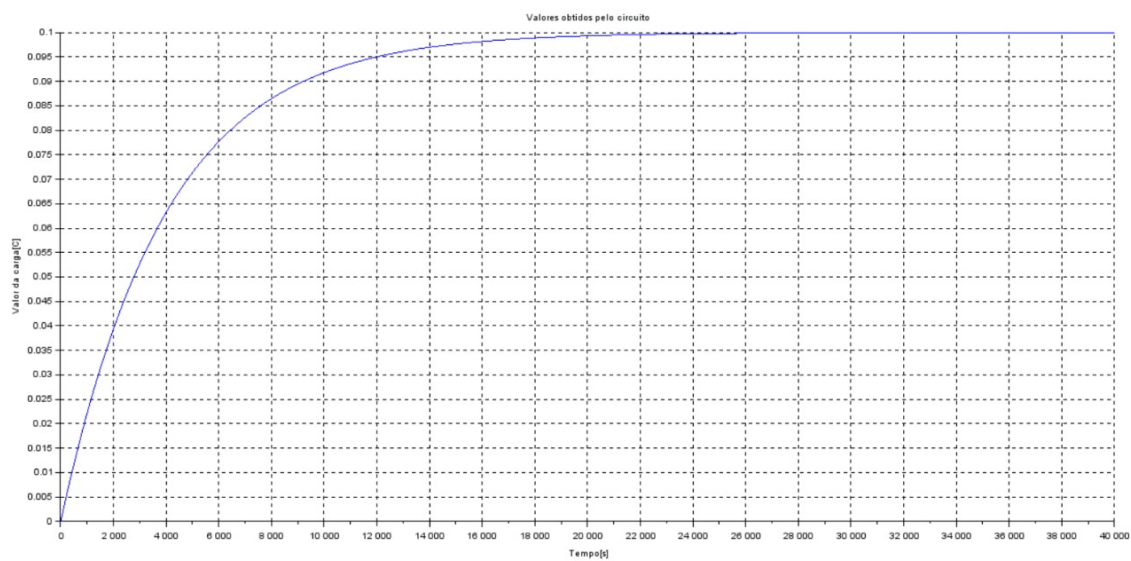


Figura 3 – Analogia por circuito equivalente.

3 Lição 1

Usando a abordagem vista nestes exemplos, faça a simulação do sistema com dois reservatórios, supondo o modelo linear:

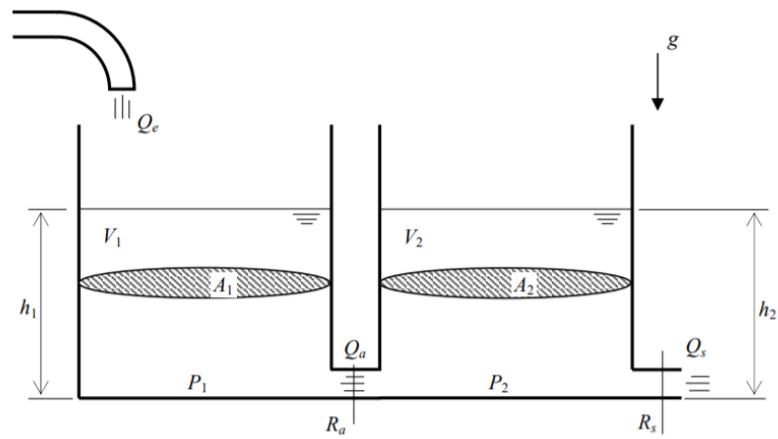


Figura 4 – Dois reservatórios característicos do problema.

As considerat as equações diferenciais como funções e suas respectivas variáveis, chegamos nos resultados:

$$\left. \frac{\partial F_1(h_1, h_2, Q_e)}{\partial h_1} \right|_{eq} = \frac{-1}{2S_1} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{10}-h_{20})}} = A_1$$

$$\left. \frac{\partial F_1(h_1, h_2, Q_e)}{\partial h_2} \right|_{eq} = \frac{1}{2S_1} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{10}-h_{20})}} = A_2; \quad \left. \frac{\partial F_1(h_1, h_2, Q_e)}{\partial Q_e} \right|_{eq} = \frac{1}{S_1}$$

$$\therefore \dot{x}_1 = \frac{1}{2S_1} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{10}-h_{20})}} \cdot x_2 + \frac{\mu}{S_1} - \frac{1}{2S_1} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{10}-h_{20})}} \cdot x_1$$

$$\left. \frac{\partial F_2(h_1, h_2)}{\partial h_2} \right|_{eq} = -\frac{1}{2S_2} \left(\sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{10}-h_{20})}} + \sqrt{\frac{\rho g}{R_b h_{20}}} \right) = A_4$$

$$\left. \frac{\partial F_2(h_1, h_2)}{\partial h_1} \right|_{eq} = \frac{1}{2S_2} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{10}-h_{20})}} = A_3$$

$$\therefore \dot{x}_2 = \frac{1}{2S_2} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{10}-h_{20})}} \cdot x_1 - \frac{1}{2S_2} \left(\sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{10}-h_{20})}} + \sqrt{\frac{\rho g}{R_b h_{20}}} \right) \cdot x_2$$

com $\dot{x} = Ax + Bu$ e $y = Cx + Du$ iguais a:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figura 5 – Linearização

Da mesma maneira que se realizou a linearização do problema dos dois tanques na Lista C, pudemos obter a simulação na Lição 1. O resultado foi o gráfico a seguir.

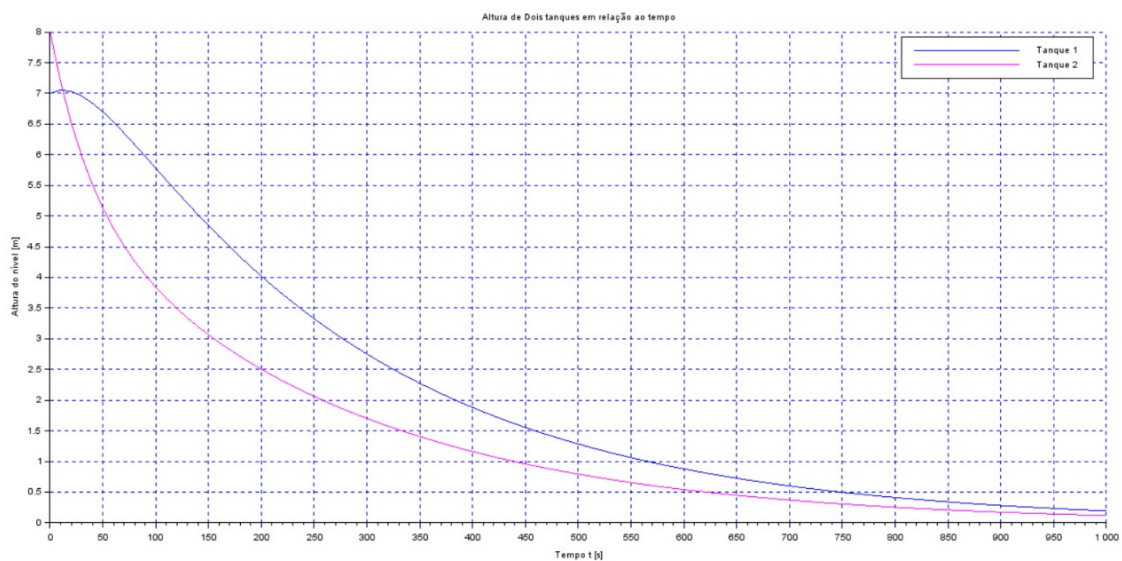
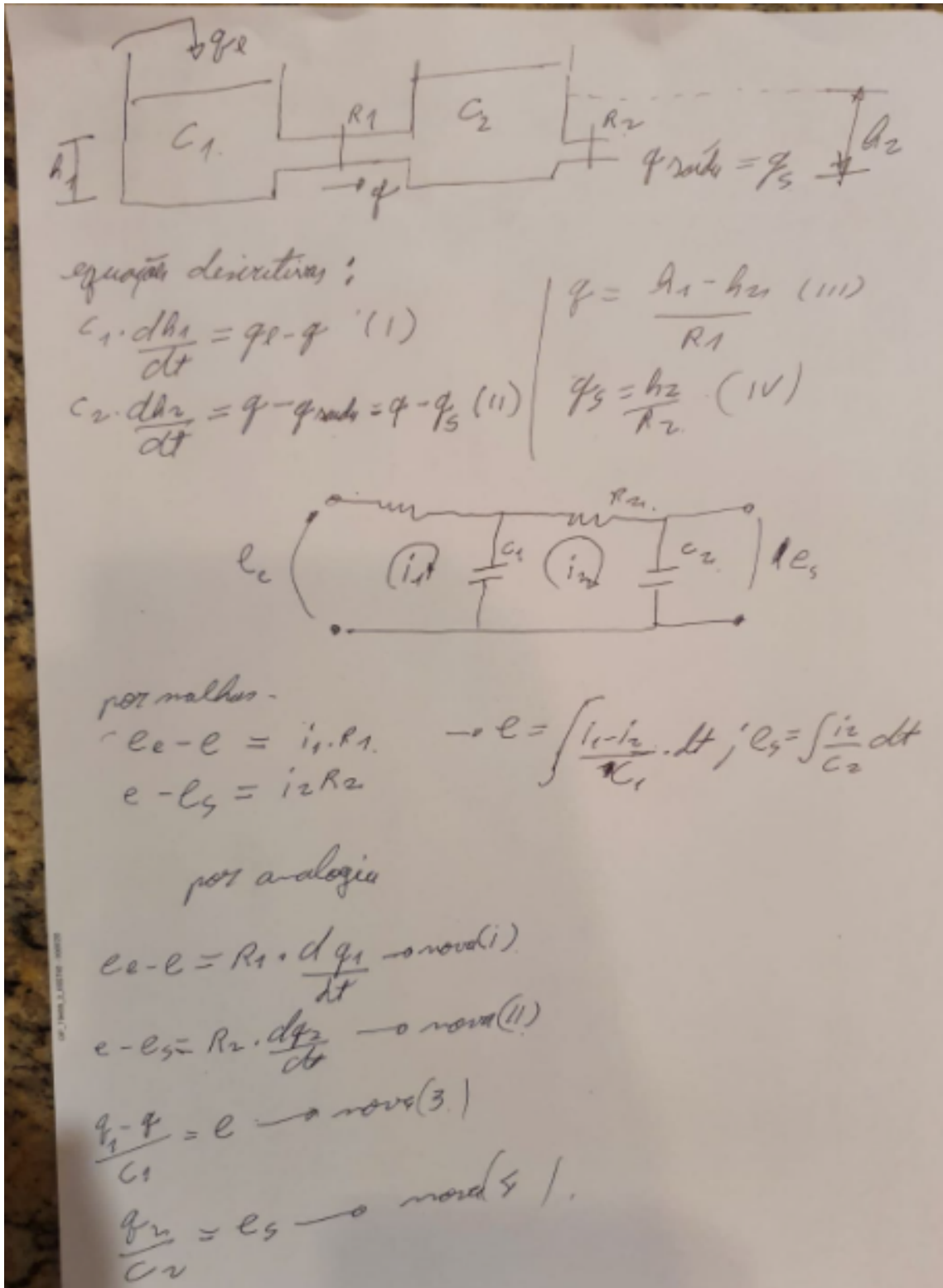


Figura 6 – Simulação dos dois reservatórios

4 Lição 2

Desenvolva um circuito elétrico análogo ao sistema com dois reservatórios.



The image shows a handwritten solution for an analog circuit problem. It starts with a diagram of two reservoirs, C_1 and C_2 , connected in series. The first reservoir has area A_1 and height h_1 . An inflow q_{in} enters from the top. The water level in the second reservoir is h_2 . The flow between the reservoirs is through a resistance R_1 , and the flow out of the second reservoir is through a resistance R_2 . The outflow is labeled $q_{saida} = q_s$.

Below the diagram, the differential equations are written:

equações diferenciais:

$$C_1 \cdot \frac{dh_1}{dt} = q_{in} - q \quad (I)$$

$$C_2 \cdot \frac{dh_2}{dt} = q - q_{saida} = q - q_s \quad (II)$$

These are grouped with two other equations:

$$q = \frac{A_1 - h_2}{R_1} \quad (III)$$

$$q_s = \frac{h_2}{R_2} \quad (IV)$$

The electrical analog circuit is shown below, consisting of a loop with two nodes, e_c and e_s . The circuit contains two capacitors, C_1 and C_2 , and two resistors, R_1 and R_2 . The current entering the first node is i_1 and the current leaving the second node is i_2 .

For the mesh (por malhas):

$$e_c - e = i_1 R_1 \quad \rightarrow e = \int \frac{i_1 - i_2}{C_1} dt; \quad e_s = \int \frac{i_2}{C_2} dt$$

$$e - e_s = i_2 R_2$$

For the analogy (por analogia):

$$e_c - e = R_1 \cdot \frac{dq_1}{dt} \rightarrow \text{nov(1)}$$

$$e - e_s = R_2 \cdot \frac{dq_2}{dt} \rightarrow \text{nov(II)}$$

$$\frac{q_1 - q}{C_1} = e \rightarrow \text{nov(3)}$$

$$\frac{q_2}{C_2} = e_s \rightarrow \text{nov(4)}$$

A Códigos de simulação

A.0.1 Exercício 1

```

1 //ITALO PAIVA 10853310 – LISTA D
2
3 //CODIGO EXERCICIO 1
4
5 // Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
6 clear all // Definir parametros:
7 S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
8 rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
9 g=10;
10 R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
11 hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
12 Qei=0; // [m^3/s] vazao na entrada
13
14 ho=2; // [m] nivel do reservatorio (reg perm.)
15
16 //sistema linear
17 A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
18 B=1/S;
19 C=1;
20 D=0;
21
22 tanque = syslin('c',A,B,C,D); // 'c' diz q eh continuo no tempo
23
24 x0 = 2; // [m] desvio inicial
25
26 //vetor tempo:
27 t=0:10:40000;
28 // o vetor de entradas:
29 u=Qei*ones(t);
30 // Simulando o sistema
31
32 [y,x]=csim(u,t,tanque,x0);
33
34 function [hpto]=sol(t,h,Qe)
35     hpto = (Qe(t) - sqrt(rho*g*h/R))/S
36 endfunction
37
38 function [u]=vazao(t)
39     u=1/1000000;
40 endfunction
41

```

```

42 h = ode(ho, t(1), t, list(sol, vazao));
43
44 // grafico
45 plot2d(t, y, 2)
46 plot2d(t, h, 6)
47 hl=legend(['Linear'; 'Não linear']);
48 :
49 xtitle("Nível do tanque em respeito ao tempo", "Tempo t [s]", "Nivel [m]");
50 // grade azul
51 xgrid(2)

```

A.0.2 Exercício 2

```

1 //valores para o exercicio 2
2 clear
3 c=2*10*sqrt(2*10^8*2/(1000*10));
4 A=-1/c;
5 B=1;
6 C=1;
7 D=0;
8 x0=0;
9 t=0:10:40000;
10
11 tanque=syslin('c',A,B,C,D);
12
13 // graficos exercicios 2
14 u=((1/2)*sqrt(1000*10/(2*10^8*2))*0.1/10)*ones(t);
15 [y,x]=csim(u, t, tanque, x0);
16 plot2d(t, y, 2)
17 xtitle("Valores obtidos pelo circuito", "Tempo[s]", "Valor da carga[C]");
18 xgrid(1)
19 xs2png(gcf(), 'plot.png');

```

A.0.3 Lição 1

```

1 clear all // limpar as variaveis
2 xdel()
3
4 S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
5 rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
6 g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
7 R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
8 ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
9 hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
10 Qeo=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada
11
12 k=(rho*g)/(2*S*Qeo*R);
13

```

```
14 C = [1,0;0,1];
15 D = [0;0];
16 A = [-k,k;k,-2*k];
17 B = [1/S;0];
18
19 // sistema linear
20 tanque=syslin('c',A,B,C,D);
21 // alturas iniciais
22 h01=7;
23 h02=8;
24
25 hini = [h01;h02];
26
27 t=0:10:1000;
28 u=Qeo*ones(t);
29 [y,x]=csim(u,t,tanque,hini);
30
31 // graficos
32 h1 = x(1,:);
33 h2 = x(2,:);
34 plot2d(t,h1,2)
35 plot2d(t,h2,6)
36 hl=legend(['Tanque 1';'Tanque 2']);
37 xtitle("Altura de Dois tanques em relação ao tempo","Tempo t [s]","Altura
do nível [m]");
38 xgrid(2)
```