Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Lista D

Gabriela Vasconcelos Araujo - 10771497

Prof. Dr. Décio Crisol Donha
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury
São Paulo, 2020

SUMÁRIO

Exercício 1 – Comparação de Modelo 2

Código 2

Saída 3

Exercício 2 – Modelo Matemático do Circuito Elétrico 3

Código 4

Saída 5

Exercício 3 – Modelo Linear com Dois Reservatórios 5

Código 6

Saída 7

Exercício 4 – Circuito Elétrico Análogo 7

Exercício 1 – Comparação de Modelo

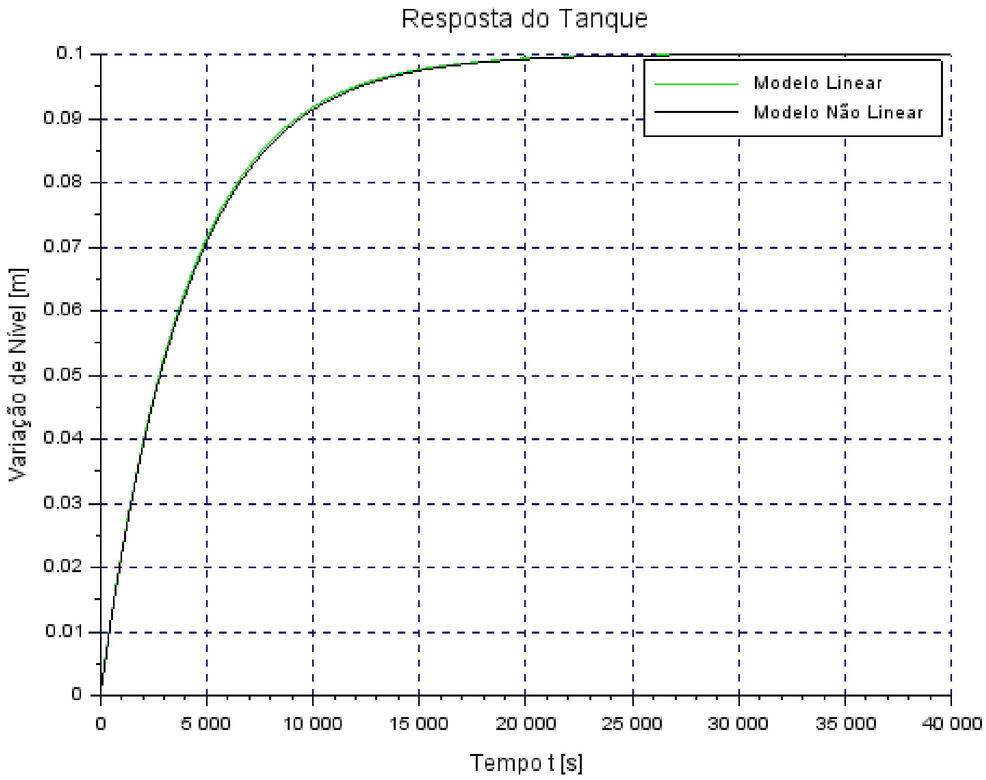
Com base no exemplo exposto no enunciado para simulação numérica de sistema linear, o exercício propõe adicionar ao código o modelo não linear, a fim de comparar os gráficos das respostas dos modelos.

Código

```
clear all

// Definir parametros:
S = 10;        // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho = 1000;    // [kg/m^3] massa especifica da agua
g = 10;        // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R = 2*10^8;    // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho = 2;        // [m] nivel do reservatorio em regime
hi = 0.1;      // [m] nivel adicional desejado
Qei = (1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi;  // [m^3/s] vazao na entrada

// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A = (-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B = 1/S;
C = 1;
D = 0;
tanque = syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh continuo no tempo

// Definir a condicao inicial:
x0 = 0;        // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
// Definir o vetor de instantes de tempo:
t = 0:10:40000;
// Definir o vetor de entradas:
u = Qei*ones(t);

// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x] = csim(u,t,tanque,x0);

// Função para variação de altura não linear
funcprot(0);
function [hponto]=tanqueNaoLinear(t, h, Qe)
   hponto = (Qe(t) - sqrt(rho*g*h/R))*(1/S);
endfunction

function [u]=entrada(t)
   u = Qei;
endfunction

Qei = sqrt(rho*g*(ho + hi)*(1/R)); // vazão de entrada inicial
h = ode(ho,t(1),t,list(tanqueNaoLinear,entrada));

// Plotando o resultado em verde:
plot2d(t,y,3) // plotagem do modelo linear
plot2d(t,h-ho) // plotagem do modelo não linear
h1 = legend(['Modelo Linear','Modelo Não Linear']);
 // Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle("Resposta do Tanque","Tempo t [s]","Variação de Nível [m]");
 // Colocando uma grade azul no grafico:
xgrid(9);
```

SAÍDA

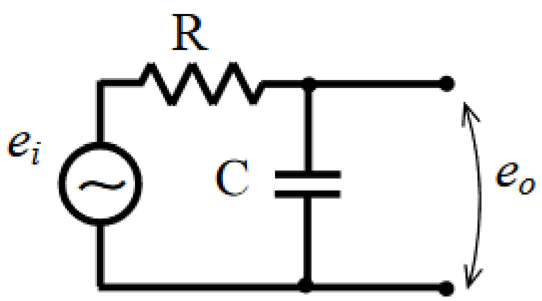
Figura 1: Resposta do Tanque - Comparação de Modelos



EXERCÍCIO 2 – MODELO MATEMÁTICO DO CIRCUITO ELÉTRICO

Para este o exercício, deve-se obter o modelo matemático do circuito elétrico abaixo exposto. Em seguida, pede-se para compará-lo com o modelo linear do sistema com um reservatório.

Figura 2: Circuito Elétrico



Aplicando a lei de Kirchhoff para a malha apresentada na figura, temos:

$$e_i - RI - \frac{1}{C}\int Idt = 0$$

Como temos que $\int I(t)dt = q(t)$, chegamos na equação diferencial abaixo:

$$e_i - R\dot{q} - \frac{1}{C}q = 0$$

$$\dot{q} = -\frac{q}{RC} + \frac{e_i}{R}$$

Por sua vez, o modelo linear do reservatório é dado por:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{Rh_o}}x + \frac{1}{S}u$$

Aplicando analogia entre as equações que definem $\dot{q}$ e $\dot{x}$:

$$e_i = u$$

$$V_i = Q_{ei}$$

$$R = S$$

$$C = 2\sqrt{\frac{R_f h_o}{\rho g}}$$

A partir dessas relações, é possível simular o circuito de maneira similar ao exercício anterior.

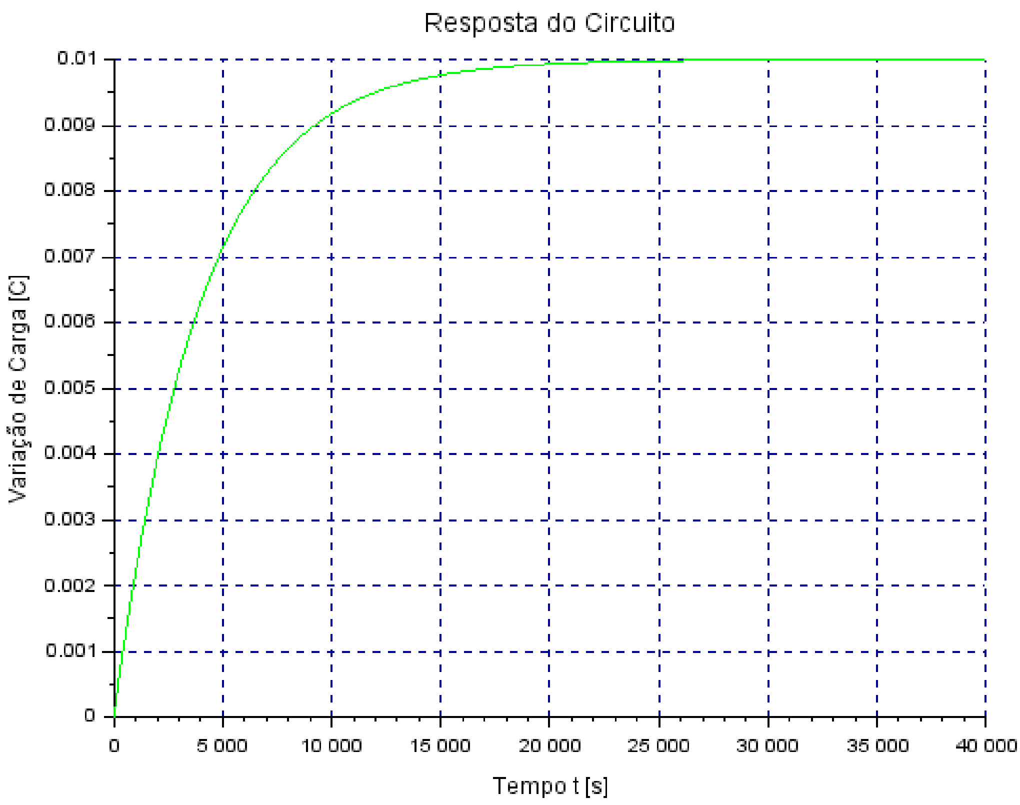
CÓDIGO

```
clear all

// Definir parametros:
S = 10;        // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho = 1000;    // [kg/m^3] massa especifica da agua
g = 10;        // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R = 2*10^8;    // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho = 2;        // [m] nivel do reservatorio em regime
hi = 0.1;      // [m] nivel adicional desejado
Qei = (1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi;  // [m^3/s] vazao na entrada

// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A = (-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B = 1/S;
C = 1;
D = 0;
tanque = syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh continuo no tempo

// Definir a condicao inicial:
x0 = 0;        // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
// Definir o vetor de instantes de tempo:
t = 0:10:40000;

u=((1/2)*sqrt(1000*10/(2*10^8*2))*0.1/10)*ones(t); // vetor de entradas
```

```
[y,x]=csim(u,t,tanque,x0); // simulação do sistema com o comando csim

// Plotagem do Resultado:
plot2d(t,y,3)
xtitle("Resposta do Circuito","Tempo t [s]","Variação de Carga [C]");
xgrid(9)
```

SAÍDA

Figura 3: Resposta do Circuito



A validade da analogia pode ser observada pela semelhança entre a Figura 1 e a Figura 4.

EXERCÍCIO 3 – MODELO LINEAR COM DOIS RESERVATÓRIOS

Da lista C, temos as seguintes equações diferenciais que caracterizam o sistema:

$$\begin{cases} \dot{h_1} = \dfrac{1}{S_1}\left[Q_e - \sqrt{\dfrac{\rho g(h_1 - h_2)}{R_a}}\right] \\ \dot{h_2} = \dfrac{1}{S_2}\left[\sqrt{\dfrac{\rho g(h_1 - h_2)}{R_a}} - \sqrt{\dfrac{\rho g h_2}{R_s}}\right] \end{cases}$$

Linearizando o sistema, ainda na lista C, encontramos:

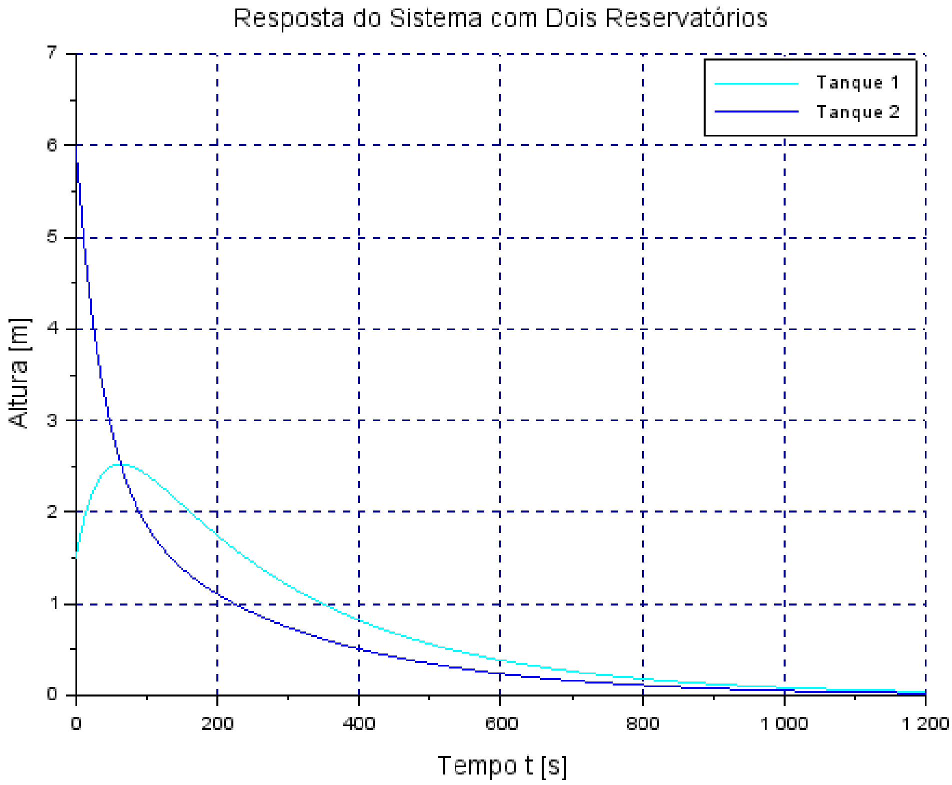
$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2S_1}\right)\sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o}-h_{2o})}} & \left(\frac{1}{2S_1}\right)\sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o}-h_{2o})}} \\ \left(\frac{1}{2S_2}\right)\sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o}-h_{2o})}} & \left(-\frac{1}{2S_2}\right)\left[\sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o}-h_{2o})}}+\sqrt{\frac{\rho g}{R_s h_{2o}}}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

CÓDIGO

```
clear all

// Definir parametros:
S = 10;       // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho = 1000;   // [kg/m^3] massa especifica da agua
g = 10;       // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R = 2*10^8;   // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho = 2;       // [m] nivel do reservatorio em regime
hi = 0.1;     // [m] nivel adicional desejado
Qei = (1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi;  // [m^3/s] vazao na entrada

// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
c = (rho*g)/(2*S*Qei*R);
A = [-c,c;c,-2*c];
B = [1/S;0];
C = [1,0;0,1];
D = [0;0];
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh continuo no tempo

// Definir a condição inicial
ho = [1.5;6]; // [m] altura inicial dos reservatórios 1 e 2, respectivamente
// Definir o vetor de instantes de tempo:
t = 0:12:1200;

u = Qei*ones(t); // vetor de entradas

// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,hinicial);
h1=x(1,:);
h2=x(2,:);

// Plotando o resultado
plot2d(t,h1,4)
plot2d(t,h2,2)
hl=legend(['Tanque 1';'Tanque 2']);
xtitle("Resposta do Sistema com Dois Reservatórios","Tempo t [s]","Altura [m]");
xgrid(9)
```

SAÍDA



EXERCÍCIO 4 – CIRCUITO ELÉTRICO ANÁLOGO

Figura 4: Circuito Elétrico Análogo ao Sistema com Dois Reservatórios