



# **Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**

## **Lista D de Modelagem de Sistemas Dinâmicos**

**Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury**

**Prof. Dr. Decio Crisol Donha**

# Sumário

Exercício 1 .....	3
Exercício 2 .....	4
Exercício 3 .....	5
Exercício 4 .....	7
Apêndice .....	8
Questão 1 .....	8
Questão 2 .....	9
Questão 3 .....	9

## Exercício 1

Nesse exercício era necessário comparar as respostas dos sistemas linear e não linear, sendo a equação linear:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2S} \sqrt{\frac{\rho g}{Rh_0}} x + \frac{1}{S} u$$

E a equação não linear:

$$\dot{h} = \left( -\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e \right) \frac{1}{S}$$

Para essa comparação, os parâmetros utilizados foram:

Tabela 1: Parâmetros da questão 1

Parâmetros			
$S$	10	$m^2$	Área da seção transversal do reservatório
$\rho$	1000	$kg/m^3$	Massa específica da água
$g$	10	$m/s^2$	Aceleração da gravidade
$R$	$2 \cdot 10^8$	$Pa/(m^3/s)^2$	Parâmetro que relaciona pressão e vazão
$h_o$	2	$m$	Nível do reservatório em regime
$h_i$	0.1	$m$	Nível adicional desejado
$Q_{ei}$	0	$m^3/s$	Vazão na entrada
$h_0$	2	$m$	Nível do reservatório na condição inicial

O resultado obtido ao executar o código foi:

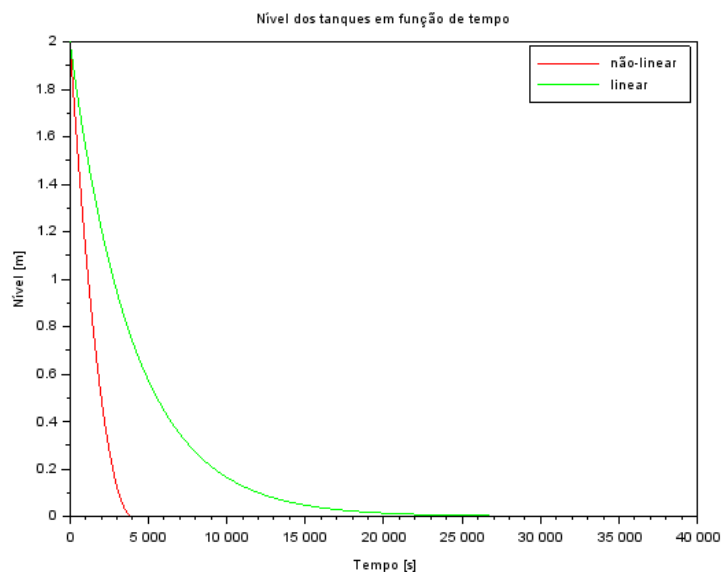


Figura 1: Resultado sistema com um reservatório

É evidente que a equação linear se afasta da não linear ao longo do tempo. Isso ocorre, pois, a linearização representa bem o resultado próxima do ponto de equilíbrio.

## Exercício 2

Tendo em vista o seguinte circuito elétrico, intenciona-se obter seu modelo matemático e compará-lo com o modelo linear do sistema do reservatório.

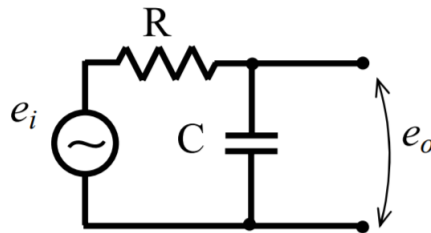


Figura 2: Circuito elétrico

Pela lei das malhas, obtemos a seguinte equação:

$$e_i - Ri - \frac{i}{(CD)} = 0$$

Considerando  $\frac{i}{D}$  como  $X$ , temos:

$$e_i - R\dot{X} - \frac{X}{C} = 0$$

Isolando  $\dot{X}$

$$\dot{X} = -\frac{X}{CR} + \frac{e_i}{R}$$

Essa equação se assemelha muito com a equação linearizada do tanque. Considerando os termos análogos:

$$X \rightarrow x$$

$$e_i \rightarrow u$$

$$R \rightarrow S$$

$$\frac{1}{C} \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho g}{Rh_o}}$$

Ao simular com os novos parâmetros, obteve-se o seguinte resultado:

Tabela 2: Parâmetros da questão 2

Parâmetros	
$R$	10
$1/C$	$-1/400$

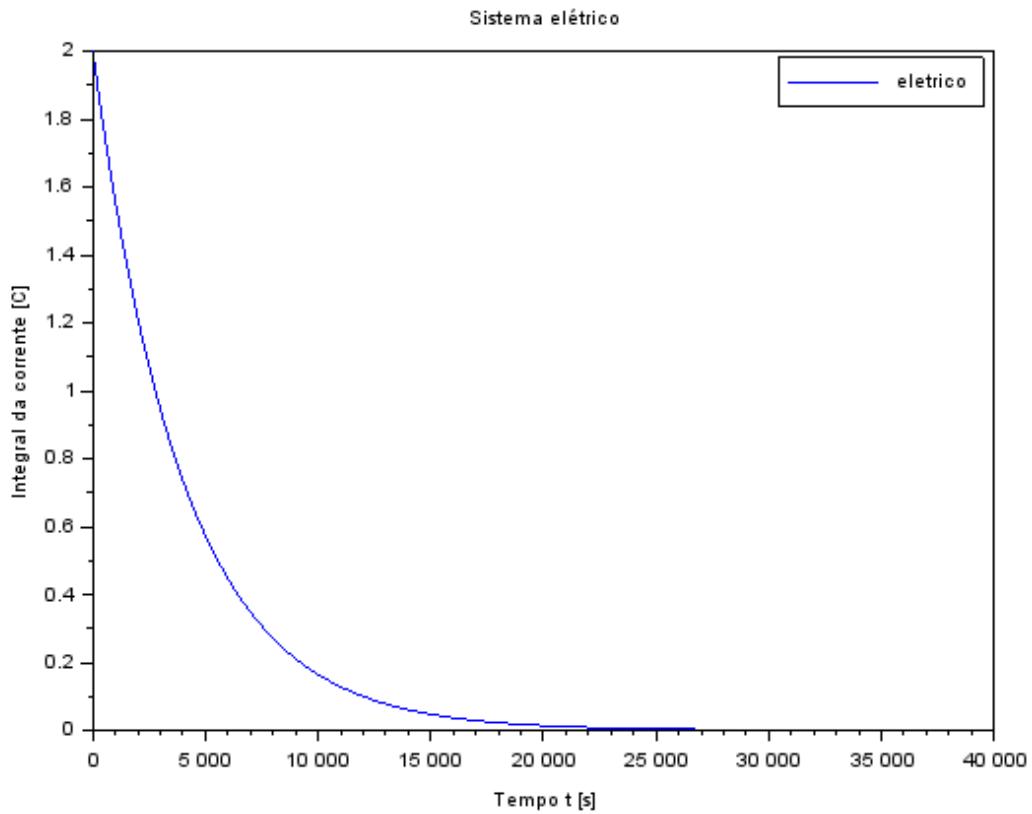


Figura 3: Resultado do sistema elétrico

### Exercício 3

Será realizada agora a simulação, supondo um modelo linear do sistema de dois reservatórios apresentado abaixo:

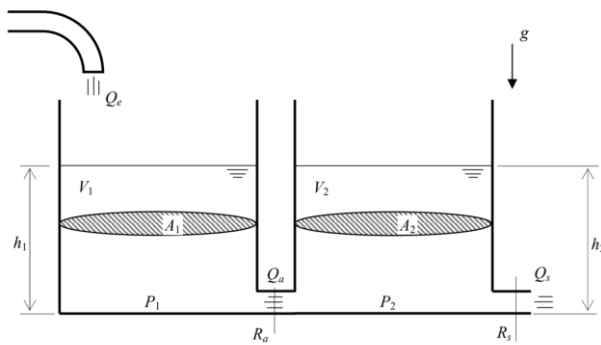


Figura 4: Sistema com dois reservatórios

Sabe-se, a partir da lista anterior a esta, a Lista C, que as equações que regem esse sistema são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2S_1} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o} - h_{2o})}} & \frac{1}{2S_1} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o} - h_{2o})}} \\ \frac{1}{2S_2} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o} - h_{2o})}} & -\frac{1}{2S_2} \left( \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o} - h_{2o})}} + \sqrt{\frac{\rho g}{R_s \cdot h_{2o}}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ S_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Para esta simulação, será considerado  $R_a = R_s$  e  $S_1 = S_2$ . Também serão avaliadas três situações: os tanques terem o mesmo nível, o tanque 1 ter um nível maior e o tanque 2 ter um nível maior.

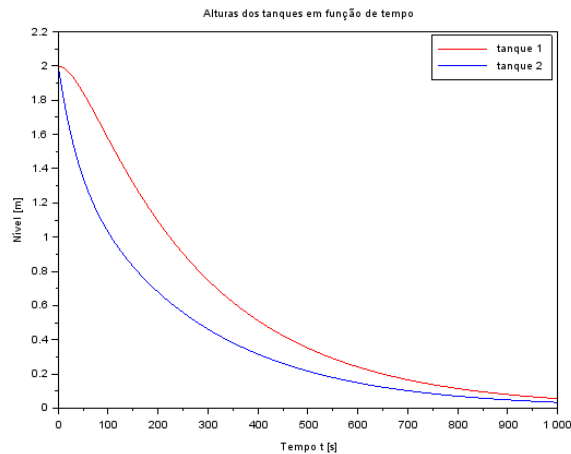


Figura 5: Resultado da simulação com tanque 1 igual ao tanque 2

Neste primeiro caso em que ambos os tanques começam com o mesmo nível, percebe-se que o tanque 2 decresce o nível imediatamente enquanto o tanque 1 diminui de maneira não tão abrupta.

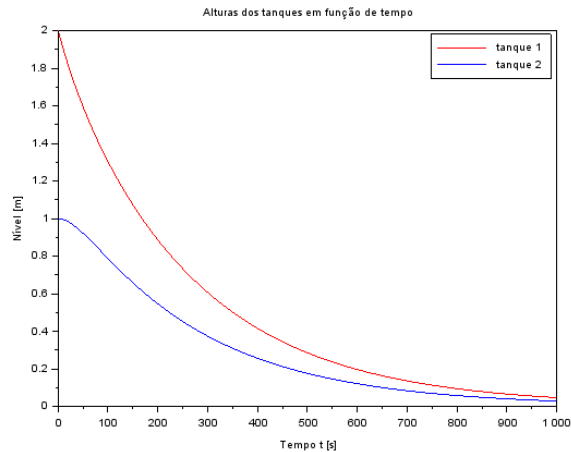


Figura 6: Resultado da simulação com tanque 1 maior que tanque 2

Neste caso em que o tanque 1 começa em um nível superior ao tanque 2, o nível do tanque 1 diminui em uma taxa semelhante à taxa do caso anterior, mudando que o começo ele cai imediatamente. Já o tanque 2 fica mais estável nos primeiros segundos para logo em seguida cair.

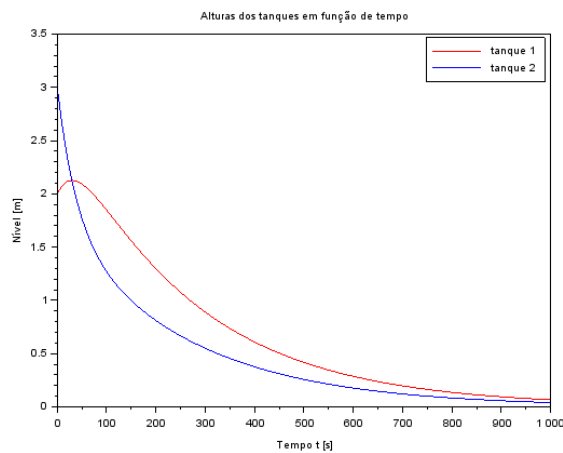


Figura 7: Resultado da simulação com tanque 2 maior que tanque 1

Esse é o último caso, em que o tanque 2 começa em um nível maior. O nível do tanque 2 decresce de forma similar ao primeiro caso. Contudo, o tanque 1 tem um aumento no nível até se igualar ao segundo reservatório para então diminuir.

## Exercício 4

O circuito elétrico análogo ao sistema com dois reservatórios é:

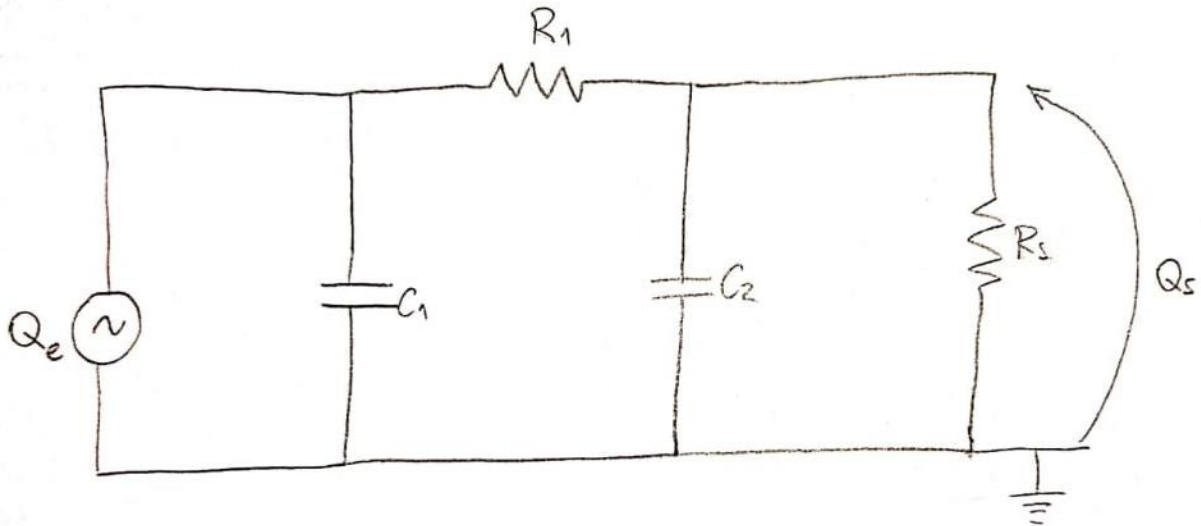


Figura 8: Circuito elétrico análogo

## Apêndice

### Questão 1

```
// Simulacao de sistema linear
// Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear all
//-----
// Definicao da funcao que implementa a equacao nao linear
function [hdot]=tanque(t, h, Qe)
hdot=(-sqrt(rho*g*h/R)+Qe(t))/S
endfunction
// Definicao da funcao que implementa a entrada Qe:
function [u]=entrada(t)
u=Qei;
// supondo o exemplo, u=K1*sin(w*t)+K2*t^(-2)
endfunction
//-----
// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=1e-6; // [m^3/s] vazao na entrada
// Definir o vetor t de instantes de tempo:
t=0:10:40000; // vetor de tempo. Observe que t(1) eh o instante inicial
// Definir a condicao inicial:
h0=2; // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial
//-----
//Para a solução não linear
// Comando que realiza a simulacao numerica:
h=ode(h0,t(1),t,list(tanque,entrada)); // h eh o nivel do reservatorio [m]
//-----
//Para o sistema linear
// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
```



```

B=1/S;
C=1;
D=0;
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
// continuo no tempo
// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,h0);
//-----
// Plotando o resultados:
plot(t,h,"r",t,y,'g');
legend(["não-linear";"linear"]);
xlabel("Nível dos tanques em função de tempo","Tempo [s]","Nível [m]");

```

## Questão 2

```

R=10;
C=-400
//Simulação do sistema linear eletrico
// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=1/(R*C);
B=1/R;
C=1;
D=0;
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema é continuo no tempo
// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);
// Simulação do sistema:
[y,x]=csim(u,t,tanque,h0);
// Plotando o resultado:
plot(t,y,'b');
legend(["eletrico"]);
xlabel("Sistema elétrico","Tempo t [s]","Integral da corrente [C]");

```

## Questão 3

```

// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nível adicional desejado
Qei=1/2*sqrt(rho*g/(ho*R))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada
Ra=R
Rs=R
S1=S
S2=S
// Definir a condicao inicial:
h0_1=2; // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial
h0_2=3; // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial
// Definir o vetor t de instantes de tempo:
t=0:10:1000; // vetor de tempo. Observe que t(1) eh o instante inicial
//Para o sistema linear
// Definir o sistema linear usando o comando syslin:

```

```

A=rho*g/2/Qei*[-1/(S1*Ra), 1/(S1*Ra);1/(S2*Ra), -1/S2*(1/Ra+1/Rs)];
B=[1/S;0];
C=[1, 0;0, 1];
D=[0;0];
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
// continuo no tempo
// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,[h0_1;h0_2]);
// Plotando o resultados:
plot(t,y(1:,:),'r',t,y(2:,:),'b');
legend(["tanque 1";"tanque 2"]);
xtitle("Alturas dos tanques em função de tempo","Tempo t [s]","Nível [m]");

```