

Alessandra da Cruz Nunes de Moraes
10337209

PME3380 - Modelagens de Sistemas Dinâmicos
Lista D

São Paulo

2020

Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistema Linear - Exemplo	3
Figura 2 – Gráfico gerado pelo Exemplo	4
Figura 3 – Resposta do Reservatório - Exercício 1	6
Figura 4 – Circuito Elétrico - Exercício 2	7
Figura 5 – Resposta do Exercício RC - Exercício 2	9
Figura 6 – Sistema com Dois Reservatórios - Lição 1	10
Figura 7 – Resposta do Reservatório - Lição de Casa 1	12

Sumário

1	EXEMPLO	3
2	EXERCÍCIOS	5
2.1	Exercício 1	5
2.2	Exercício 2	7
3	LIÇÃO DE CASA	10

1 Exemplo

O objetivo dessa lista é realizar a simulação numérica de sistemas lineares compostos por equações diferenciais (equações de estado) e equações algébricas (equações de saída). No primeiro exemplo, foi implementado o código abaixo para resolver o seguinte sistema linear:

$$\dot{x} = -\underbrace{\frac{1}{2S} \sqrt{\frac{\rho g}{R h_o}}}_A x + \underbrace{\frac{1}{S}}_B u \quad (\text{equações diferenciais})$$

$$y = \underbrace{+1}_C x + \underbrace{0}_D u \quad (\text{equações algébricas})$$

Figura 1 – Sistema Linear - Exemplo

```

1 // Simulacao de sistema linear
2 // Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
3 clear all
4 // Definir parametros:
5 S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
6 rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
7 g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
8 R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
9 ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
10 hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
11 Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada
12 // Definir o sistema linear usando o comando syslin:
13 A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
14 B=1/S;
15 C=1;
16 D=0;
17 tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
18 // continuo no tempo
19 // Definir a condicao inicial:
20 x0=0; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
21 // Definir o vetor de instantes de tempo:
22 t=0:10:40000;
23 // Definir o vetor de entradas:
24 u=Qei*ones(t);
25 // Simulando o sistema usando o comando csim:
26 [y,x]=csim(u,t,tanque,x0);
27 // Plotando o resultado em verde:
28 plot2d(t,y,3)
29 // Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:

```

```
30 xtitle("Resposta do circuito elétrico", "Tempo t [s]", "Carga [C]");  
31 // Colocando uma grade azul no grafico:  
32 xgrid(2)
```

A implementação gerou o seguinte gráfico:

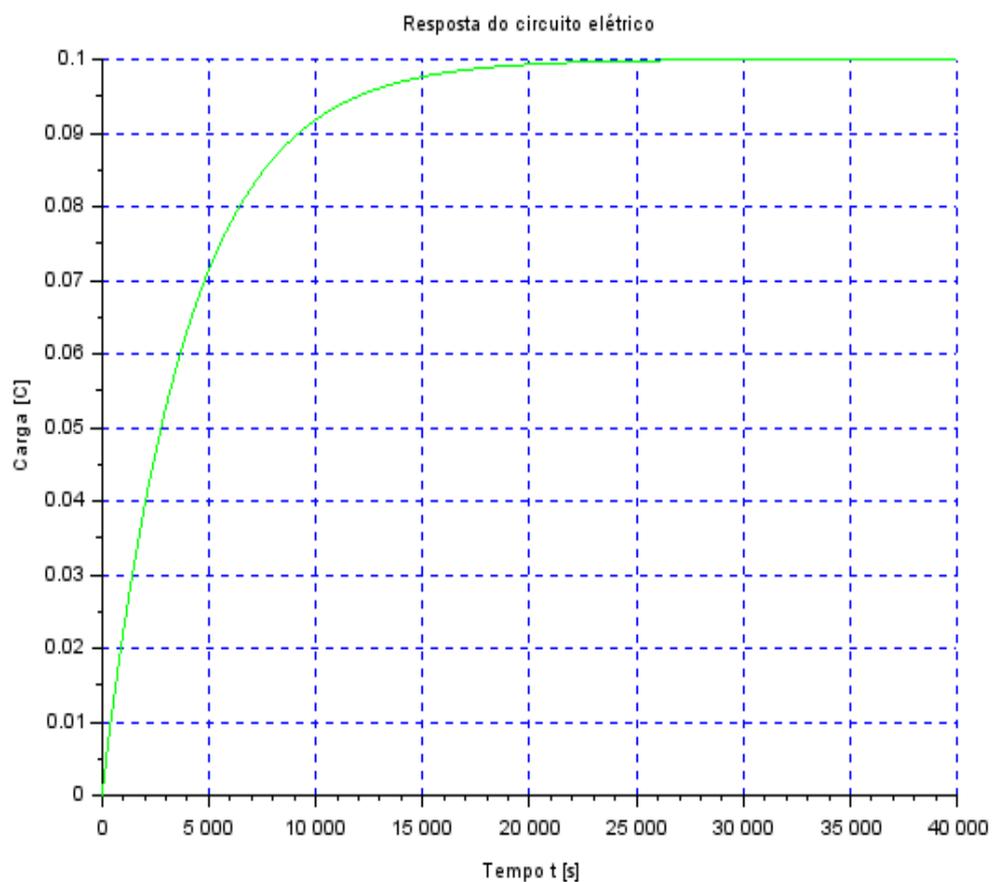


Figura 2 – Gráfico gerado pelo Exemplo

2 Exercícios

2.1 Exercício 1

A proposta do exercício era fazer algumas alterações no código do exemplo anterior, para que fosse possível desenhar e comparar as simulações não-lineares e as lineares usando as seguintes condições iniciais: nível inicial do tanque = 2m e vazão de entrada nula.

O código implementado foi:

```

1 // Definicão da funcao que implementa a equacao nao linear
2 function [hdot]=tanque(t, h, Qe)
3 hdot=(-sqrt(rho*g*h/R)+Qe(t))/S
4 endfunction
5
6 // Definicão da funcao que implementa a entrada Qe:
7 function [u]=entrada(t)
8 u=Qei;
9 endfunction
10
11 // Simulacao de sistema linear
12 // Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
13 clear all
14 clc
15 // Definir parametros:
16 S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
17 rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
18 g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
19 R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
20 ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
21 hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
22 Qei=(1e-2)*(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada
23 // Definir a condicao inicial:
24 h0=2; // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial
25 // Definir o sistema linear usando o comando syslin:
26 A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
27 B=1/S;
28 C=1;
29 D=0;
30 tanquelin=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
31 // continuo no tempo
32 // Definir a condicao inicial:
33 x0=2; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
34 // Definir o vetor de instantes de tempo:
35 t=0:10:40000;

```

```

36 // Definir o vetor de entradas:
37 u=Qei*ones(t);
38 // Simulando o sistema usando o comando csim:
39 [y,x]=csim(u,t,tanquelin,x0);
40 // Plotando o resultado em verde:
41 plot2d(t,y,3)
42 // Colocando uma grade no grafico:
43 xgrid(0)
44
45 // Comando que realiza a simulacao numerica nao linear:
46 h=ode(h0,t(1),t,list(tanque,entrada)); // h eh o nivel do reservatorio [m]
47 // Plotando o resultado em azul:
48 plot2d(t,h,2)
49 // Definindo uma variavel do tipo 'lista':
50 T=list("Resposta do reservatorio","Tempo t [s]","Nivel h [m]");
51 // Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
52 xtitle(T(1),T(2),T(3));

```

A diferença entre o comportamento das duas curvas se deve à linearização realizada, onde foram assumidas simplificações que acabaram não retratando com precisão o comportamento real do sistema. Os resultados foram apresentados na figura 3, a linha verde representa a simulação linear, e a linha azul a simulação não-linear.

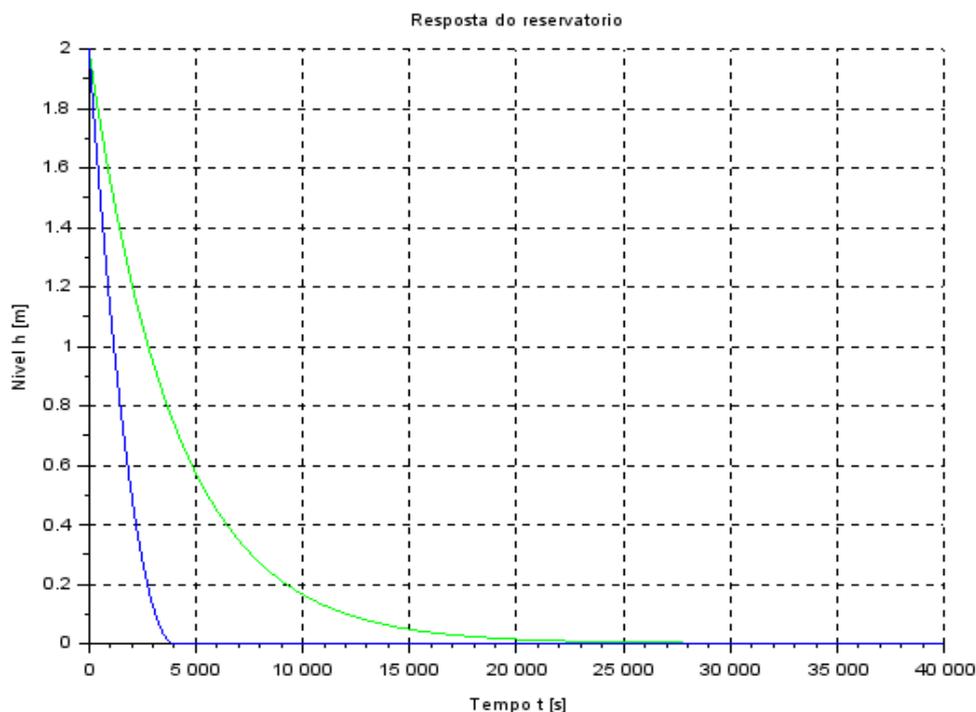


Figura 3 – Resposta do Reservatório - Exercício 1

2.2 Exercício 2

A proposta do segundo exercício era obter o modelo matemático do circuito elétrico da figura 4 e comparar com o modelo linear do sistema com um reservatório.

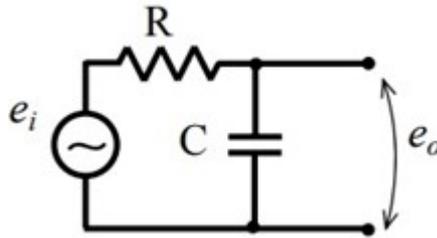


Figura 4 – Circuito Elétrico - Exercício 2

O modelo matemático foi determinado a partir da lei de Kirchoff:

$$e_i = R \cdot i + e_0 \quad (2.1)$$

Usando a definição de capacitância:

$$e_0 = q/C \quad (2.2)$$

$$e_i = R \cdot \dot{q} + \frac{q}{C} \quad (2.3)$$

$$\dot{q} = \frac{-q}{RC} + \frac{e_i}{R} \quad (2.4)$$

Como tanto a equação do modelo quanto a equação linear do modelo com reservatório podem ser escritas como $\dot{x} = Ax + B$, é perceptível a semelhança. Assim, por analogia, foi realizada a simulação do código abaixo:

```

1 // Simulacao de sistema linear
2 // Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
3 clear all
4
5 S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
6 rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
7 g=10; // [m/s^2] aceleracao da gravidade na superficie da Terra
8 R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
9 ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
10 hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
11 Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada
12
13 // Equivalência para sistema elétrico:
14 ei=Qei; //Tensão de alimentação
15 Res=S; //Resistencia do sistema

```

```
16 C=1/((1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho)));
17
18 // Definir o sistema linear usando o comando syslin:
19 A = (-1/(2*Res))*sqrt(rho*g/(R*ho));
20 B=1/Res;
21 C=1;
22 D=0;
23 circuito=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
24 // contínuo no tempo
25 // Definir a condicao inicial:
26 x0=0; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
27 // Definir o vetor de instantes de tempo:
28 t=0:10:40000;
29 // Definir o vetor de entradas:
30 u=ei*ones(t);
31 // Simulando o sistema usando o comando csim:
32 [y,q]=csim(u,t,circuito,x0);
33 //Plotando o resultado em verde:
34 plot(t,y,"r")
35 // Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
36 xtitle(" Respos ta do circuito RC" , "Tempo t [ s ] " , " Variacao de
    carga [C]");
37 // Colocando uma grade azul no gráfico:
38 xgrid(2)
```

Realizando a simulação desse sistema, com as analogias definidas, chegamos no resultado mostrado a seguir na figura 5, relacionando a carga do circuito em relação a tempo. Foi utilizada uma curva em vermelho para dar maior visibilidade.

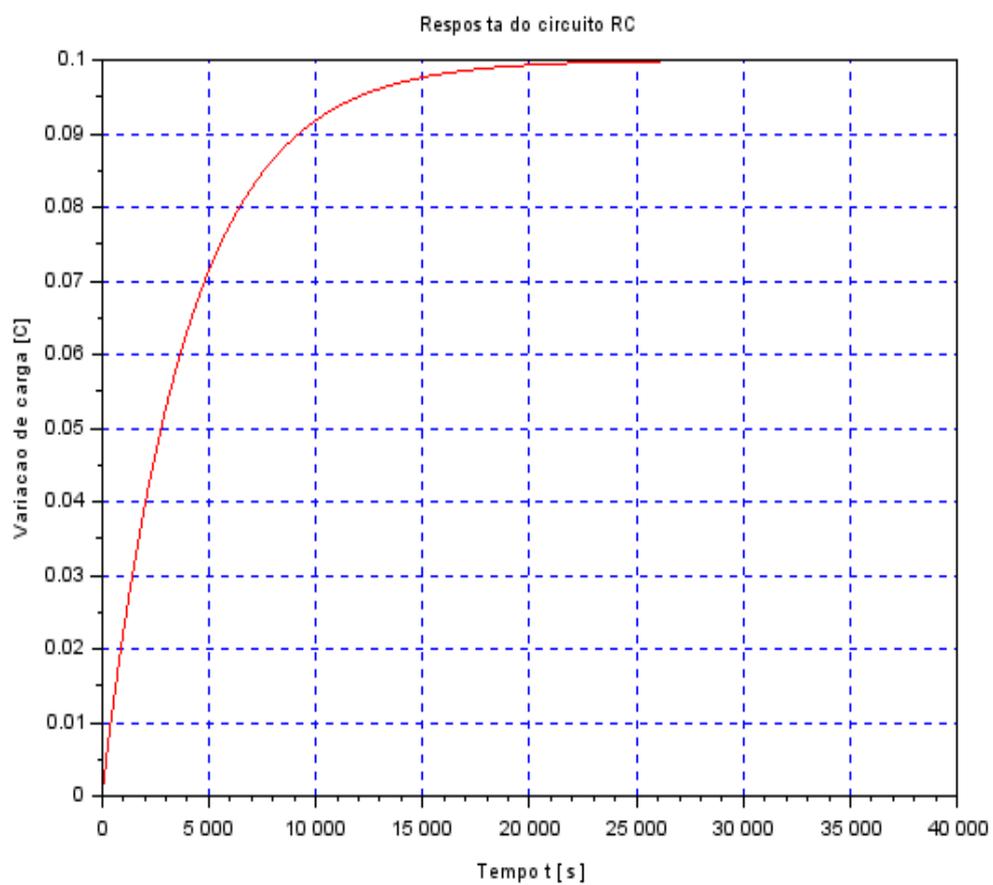


Figura 5 – Resposta do Exercício RC - Exercício 2

Percebe-se que, definindo essa analogia, a resposta do sistema é a mesma, devido à igualdade apresentada na solução da equação diferencial.

3 Lição de Casa

A proposta do exercício era simular o sistema com dois reservatórios mostrado na figura abaixo utilizando o modelo linear visto no exemplo e no exercício 1.

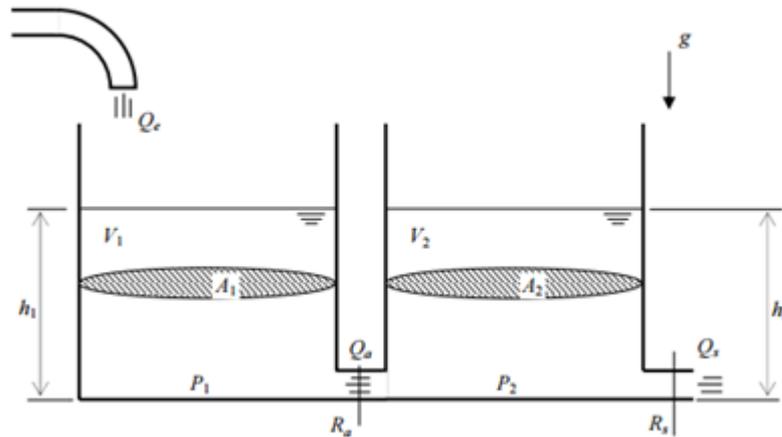


Figura 6 – Sistema com Dois Reservatórios - Lição 1

Simulando o código abaixo com as seguintes condições iniciais: $h_1 = 5\text{m}$ e $h_2 = 5\text{m}$, obtemos o gráfico presente na figura 7, onde a linha verde representa a altura do reservatório 1 e a linha azul representa a altura do reservatório 2.

```

1 // Simulacao de sistema linear
2 // Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
3 clear all
4
5 // Definir parametros:
6 S1=20; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
7 S2=20;
8 rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
9 g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
10 Ra=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
11 Rb=2*10^8;
12 ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
13 hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
14 Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/((h0-hi)*Ra)); // [m^3/s] vazao na entrada
15 // Definir a condicao inicial:
16 h10=(Ra+Rb)*Qei^2/(rho*g); // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial
17 h20=Rb*Qei^2/(rho*g);
18 // Definir o sistema linear para o sistema usando o comando syslin:
19 A=[(-1/(2*S1))*sqrt(rho*g/(Ra*h10)) (1/(2*S1))*sqrt(rho*g/(Ra*h20));
20 (1/(2*S2))*sqrt(rho*g/(Ra*h10)) (-1/(2*S2))*sqrt(rho*g*(Ra+Rb)/(Ra*Rb*
    h20))];

```

```
21 B=[1/S;0];
22 C=[1 0;0 1];
23 D=[0;0];
24 tanquelin=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
25 // contínuo no tempo
26 // Definir a condicao inicial:
27 x0=[5;5]; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
28 // Definir o vetor de instantes de tempo:
29 t=0:10:40000;
30 // Definir o vetor de entradas:
31 u=Qei*ones(t);
32 // Simulando o sistema usando o comando csim:
33 [y,x]=csim(u,t,tanquelin,x0);
34 // Plotando o resultado em verde reservatório 1:
35 plot2d(t,y(1,:),3)
36 // Plotando o resultado em azul reservatório w:
37 plot2d(t,y(2,:),2)
38 // Colocando uma grade no grafico:
39 xgrid(0)
40 // Definindo uma variavel do tipo 'lista':
41 T=list("Resposta do reservatorio","Tempo t [s]","Diferenca de nivel h [m]")
    ;
42 // Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
43 xtitle(T(1),T(2),T(3));
```

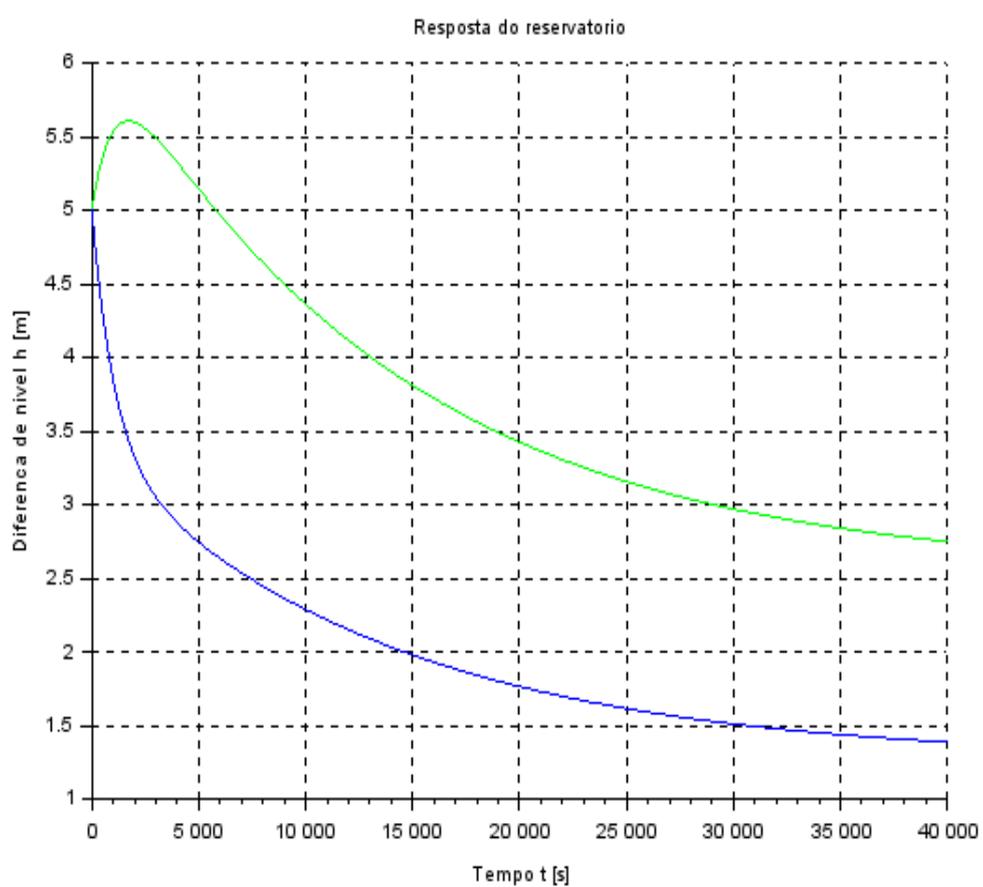


Figura 7 – Resposta do Reservatório - Lição de Casa 1