01/10/2020 | PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos
LISTA D
Nome: José Felipe Felix Rafael
NUSP: 10333139

Exercício 1

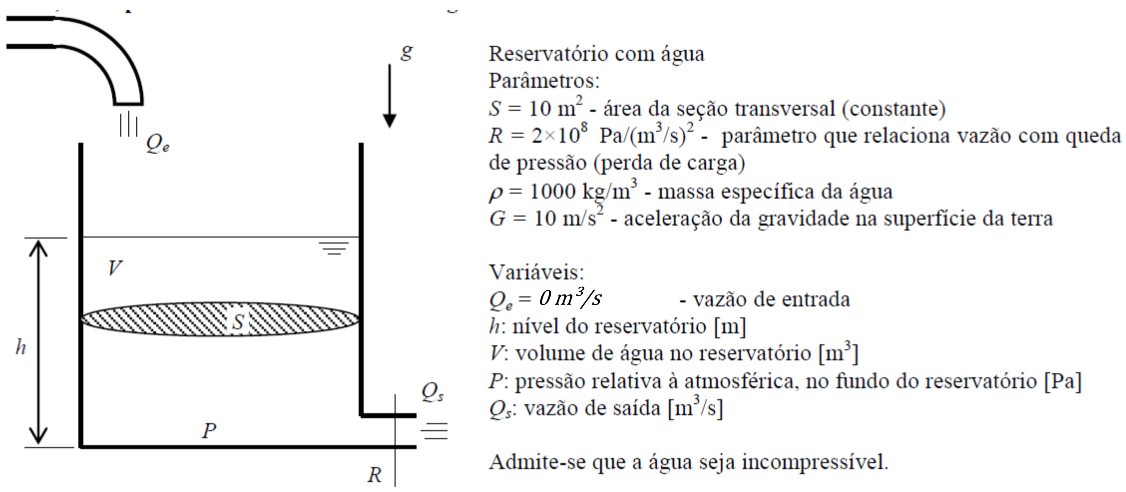


Figura 1 - Modelo representativo, parâmetros e variáveis do problema

Neste exercício foi proposto modelar a resposta de um tanque que contém inicialmente um determinado volume de fluido e que possui uma vazão de saída, mas não uma de entrada.

Da dedução feita na Lista B, considerando a vazão de entrada (Q_e) nula, obtém-se a equação diferencial que descreve a altura do fluido no tanque (h) em função do tempo

$$\dot{h} = -\frac{1}{S}\sqrt{\frac{\rho g}{R}h} = f(h) \tag{1}$$

A equação diferencial (1) pode ser linearizada em torno do ponto de equilíbrio h_0 pela expansão na série de Taylor

$$f(h) = f(h_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{h_0}(h - h_0) + \mathbb{O}(2)$$

Desprezando os termos de ordem superior

$$f(h) \cong -\frac{1}{S}\sqrt{\frac{\rho g}{R}h_0} - \frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{Rh_0}}(h - h_0) \tag{2}$$

O ponto de equilíbrio h_0 é definido

$$h_0 = h \mid \dot{h}(h) = 0$$

$$\therefore h_0 = 0$$

Nota-se então que não é possível linearizar a equação 1 em torno de $h_0 = 0$, uma vez que isso causaria uma indefinição na equação 2.

Assim conclui-se que o uso da série de Taylor não é o método adequado para linearizar este modelo matemático.

Em vista disso, para evitar a indefinição, foi adotado $h_0 = 0.1\ [m]$.

Foram então obtidos os resultados apresentados no gráfico da figura 2.

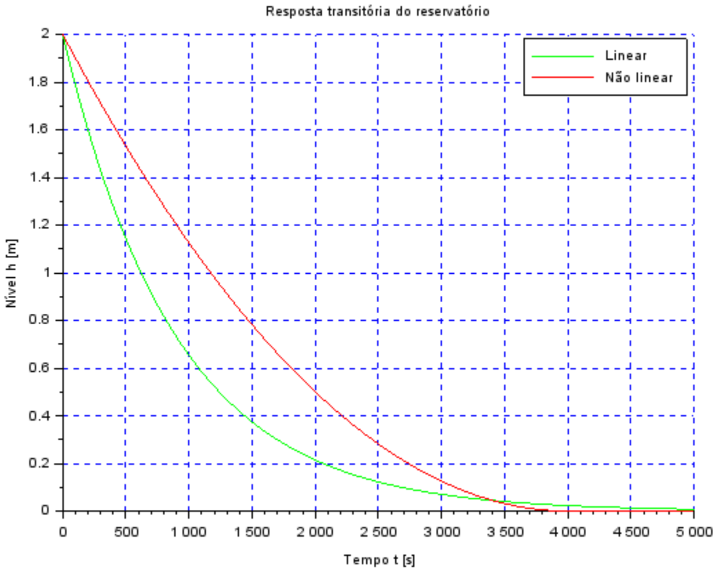


Figura 2 - Comparação entre modelo linear e não linear

Nota-se que o comportamento do modelo linearizado é consideravelmente diferente do modelo não linearizado. Tal resultado pode prover do fato de que o modelo está afastado do ponto de equilíbrio.

```
// --------------- Simulação de sistema linear --------------- //
clear all // apaga as variáveis anteriores

// Parâmetros
S=10; // [m^2] Área da seção transversal do reservatório
rho=1000; // [kg/m^3] massa específica da água
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superfície da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parâmetro que relaciona pressão e vazão
ho=0.1 // [m] nível do reservatório em regime
hi=0.1; // [m] nível adicional desejado
Qei=1e-6; // [m^3/s] vazão na entrada

// Sistema linear usando o comando syslin
A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B=0;
C=1;
D=0;
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parâmetro 'c' indica que o sistema é contínuo no tempo

// Condição inicial
x0=2; // [m] desvio inicial do nível em relação ao equilíbrio

// Vetor de instantes de tempo
t=0:10:5000;

// Vetor de entradas
u=Qei*ones(t);
```

```
// Simulando o sistema usando o comando csim
[y,x]=csim(u,t,tanque,x0);

// Plotando o resultado em verde
plot2d(t,y,3);

// -------------- Simulação de sistema não linear -------------- //

// Definição da função que implementa a equação não linear
function [hdot]=tanque(t, h, Qe)
hdot=(-sqrt(rho*g*h/R)+Qe(t))/S
endfunction

// Definição da função que implementa a entrada Qe:
function [u]=entrada(t)
u=Qei;
// supondo o exemplo, u=K1*sin(w*t)+K2*t^(-2)
endfunction

// Comando que realiza a simulação numérica
h=ode(x0,t(1),t,list(tanque,entrada)); // h é o nível do reservatório [m]

// Plotando o resultado em vermelho
plot2d(t,h,5)

// Definindo uma variável do tipo 'lista'
T=list("Resposta transitória do reservatório","Tempo t [s]","Nível h [m]");

// Colocando um título na figura e nomeando os eixos
xtitle(T(1),T(2),T(3));

// Colocando uma grade azul no gráfico
xgrid(2);

// Colocando legenda
hl=legend(['Linear';'Não linear']);
```

Exercício 2

A modelagem matemática do circuito fica:

Pela lei de Kirchoff, na malha, chegamos na equação diferencial do circuito que modela a carga no capacito em função das variáveis apresentadas no problema:

$$e_i - qR - \frac{\dot{q}}{C} = 0$$

Para se chegar na solução analítica, separaremos as variáveis e integraremos, chegando na seguinte expressão para carga:

$$q = e_i C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

No entanto, a variável de maior interesse, neste caso, é a corrente, então usando a definição de corrente:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

E derivando a equação encontrada, chegamos na equação analítica da corrente do circuito:

$$i = \frac{e_i}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Para realizar a simulação no Scilab, foi desenvolvido o seguinte algoritmo:

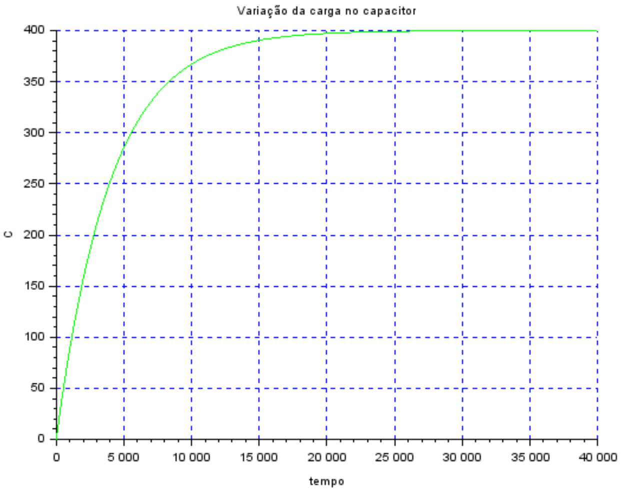
```
clear
clc
//parametros
t=1:10:40000; //tempo
R = 2000 //resistencia na valvula
C = 2 //capacitancia
E = 200
x = zeros(1:10:40000)


//Carga no capacitor
for i=1:4000
    x(i) = t(i)/(R*C)
end

q = E*C*(1-exp(-x)) //solucao da equacao diferencial
plot2d(t,q,3)
xtitle("Variação da carga no capacitor","tempo","C");
xgrid(2)

Corrente no circuito
i = (exp(-x))/(R*C)
plot2d(t,i,3)
xtitle("Variação da corrente no capacitor","tempo","A");
xgrid(2)
```

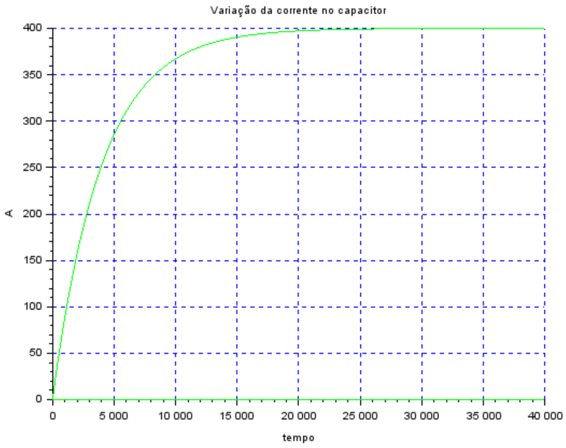
Uma vez que as análises a serem feitas possuem caráter qualitativa, as constantes empregas na solução numérica foram escolhidas de modo a evidenciar a característica da curva em estudo.

Como foi estudado, há analogias entre circuitos elétricos e fluídicos, sendo no caso em questão um circuito RC em série, a analogia associa os tanques aos capacitores, perdas aos resistores e a corrente à vazão do sistema.

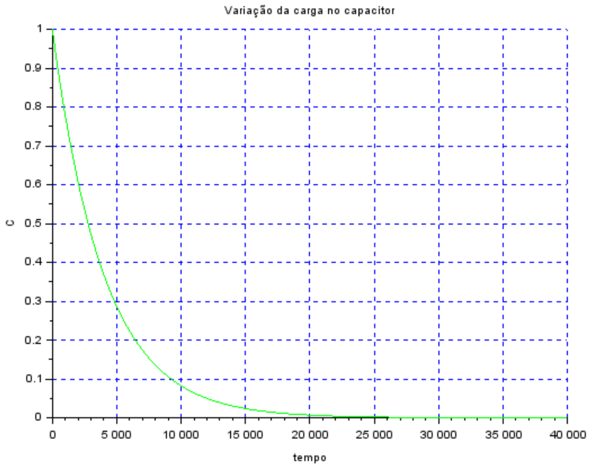
No exercício 1, foi estudado a vazão conforme a existência de uma fonte ao tanque, devido a isso iremos estudar a variação da corrente, a qual por analogia, se assemelha a vazão, além disso, também será mostrado a curva de carga do capacitor a fim de ter uma visão mais abrangente do problema estudado.

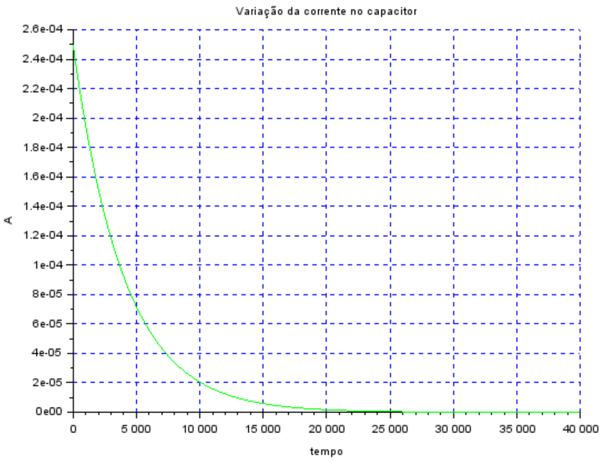
Caso 1: Fonte de tensão constante





Caso 2 – Sem fonte de tensão constante





Conclusão

Dada as devidas escalas o comportamento da variável em análise, corrente e vazão, se aproximaram nas duas situações descritas (com e sem fonte, sendo respectivamente com fonte de tensão constante e sem), comprovando, portanto, o possível uso da analogia fluído-elétrica para resolução de problemas de fluidodinâmica.