

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3380 - Modelagem de Sistemas
Dinâmicos

LISTA D - SOLUÇÃO ANALÍTICA DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS,
LINEARES, A PARÂMETROS CONSTANTES E
DE 1^A ORDEM

Vitor Gregio Lourencini (8956387)

São Paulo
Outubro de 2020

1 Comparação dos Modelos Linear e Não-Linear do Sistema de 1 Reservatório

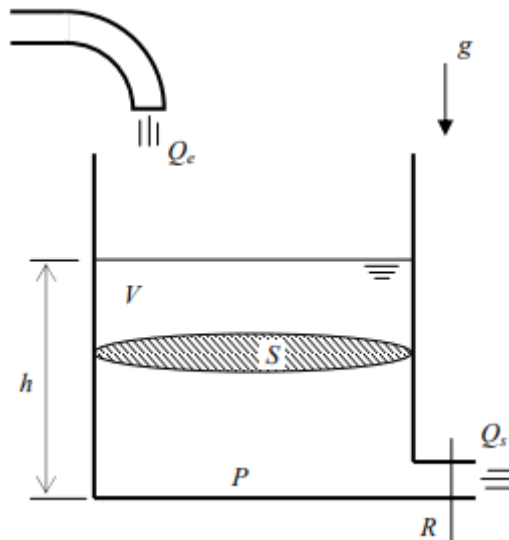


Figura 1: Sistema de 1 reservatório

A partir do modelo da figura 1 foram definidas as seguintes condições iniciais:

- $S = 10m^2$
- $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$
- $g = 10 \frac{m}{s^2}$
- $R = 2 \cdot 10^8 \frac{Pas^2}{m^6}$
- $h_o = 2m$
- $Q_{ei} = 0$

Em que o modelo matemático do sistema é descrito pelas seguintes equações diferenciais linear e não-linear, respectivamente:

$$\dot{h} = \left(-\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e\right) \frac{1}{S} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2S} \sqrt{\frac{\rho g}{Rh_0}} x + \frac{1}{S} u \\ y = x \\ x = h - h_0 \\ u = Q_e - Q_{ei} \end{cases} \quad (2)$$

O código para a comparação foi desenvolvido no *software SciLab*, na qual a solução linear foi feita pelos comandos "*syslin*" e "*csim*", enquanto o modelo não-linear foi calculado pelo método de Euler.

```

// Definir parâmetros:
S = 10; // [m²] Área da Seção Transversal do Reservatório
rho = 1000; // [m³] Densidade da Água
g = 10; // [m/s²] Aceleração Gravitacional
R = 2e08; // [Pa/(m³/s)²] Parâmetro que relaciona Pressão e Vazão
ho = 2; // [m] Nível do reservatório em regime
Qe = 0; // [m³/s] Vazão de Entrada

// Definir a condição e parâmetros iniciais:
x0 = 2; // [m] Desvio inicial do nível em relação ao equilíbrio
dt = 10; // [s] Discretização do tempo
t = 0:dt:40000; // [s] Vetor de instantes de tempo
u = Qe*ones(t); // Vetor de entradas

// Solução do Sistema Linear com os comandos "syslin" e "csim"
A = (-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B = 1/S;
C = 1;
D = 0;
tanque = syslin('c',A,B,C,D);

[ylin,xlin] = csim(u,t,tanque,x0);

// Solução do Sistema Não-Linear por Euler
ynlin = x0;

for i = 1:length(t)
ynlin(i+1) = ynlin(i) + (real(-sqrt(rho*g*ynlin(i)/R)) + Qe) / S * dt;
end

// Plot da Solução
plot(t,ylin,t,ynlin)
legend("Linear","Não-Linear")
xlabel("Comparação do Método Linear e Não-Linear","Tempo [s]","Variacao de nível [m]");
xgrid(2)

```

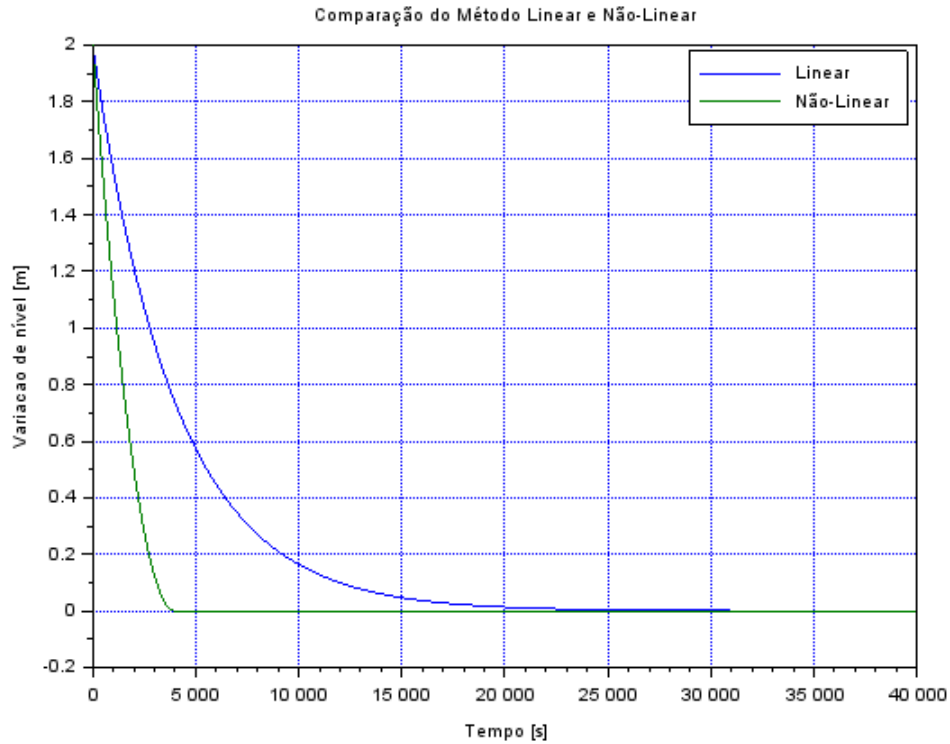


Figura 2: Comparação da aproximação linear

O resultado da comparação é apresentado na figura 2 acima, na qual é possível ver que a aproximação linear longe do ponto de equilíbrio não é tão boa.

2 Modelo Elétrico

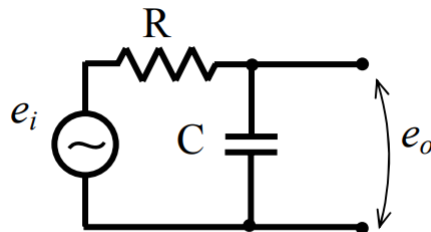


Figura 3: Circuito elétrico de comparação

O circuito da figura 3 será modelado a partir da variável "carga"(Q). Para a malha fechada que contempla e_i , R e C , temos:

$$e_i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}R + \frac{Q(t)}{C} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{Q(t)}{RC} + \frac{e_i(t)}{R} \quad (4)$$

A variável que nos interessa é a tensão sobre o capacitor e_0 , sendo assim podemos montar o sistema de equações na forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (5)$$

Onde temos:

$$\begin{cases} x = Q \\ y = e_0 \\ A = -\frac{1}{RC} \\ B = \frac{1}{R} \\ C = \frac{1}{C} \\ D = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Comparando com o modelo linearizado do reservatório, para a equação de estado $\dot{x} = Ax + B$ podemos relacionar a resistência elétrica com a área da seção do reservatório, enquanto a capacitância pode relacionada com o fator $\sqrt{\left(\frac{Rh_0}{\rho g}\right)}$, que pode ser interpretado como a resistência à vazão da água e a vazão como a tensão de entrada.

Por comparação, simula-se um gráfico 4 do circuito admitindo os seguintes parâmetros:

- $R = 5\Omega$
- $Q_0 = 1mC$
- $e_i = 0V$
- $C = 1mF$

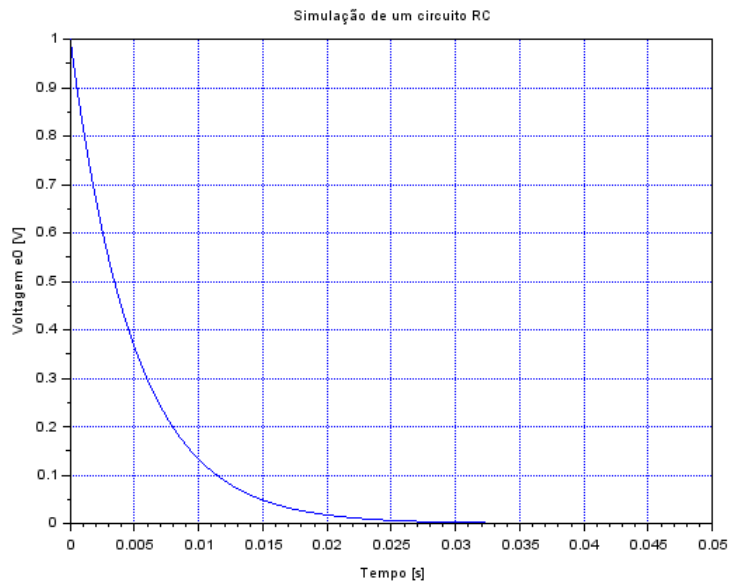


Figura 4: Carga em um circuito elétrico RC

Note que o gráfico possui o mesmo padrão de decaimento que o do modelo linearizado do reservatório, porém as escalas típicas envolvidas mudam completamente. Ambos começam em um valor inicial e decaem exponencialmente até a entrada constante, que em ambos os casos neste exemplo são nulas.

3 Modelo linear para o sistema de 2 reservatórios

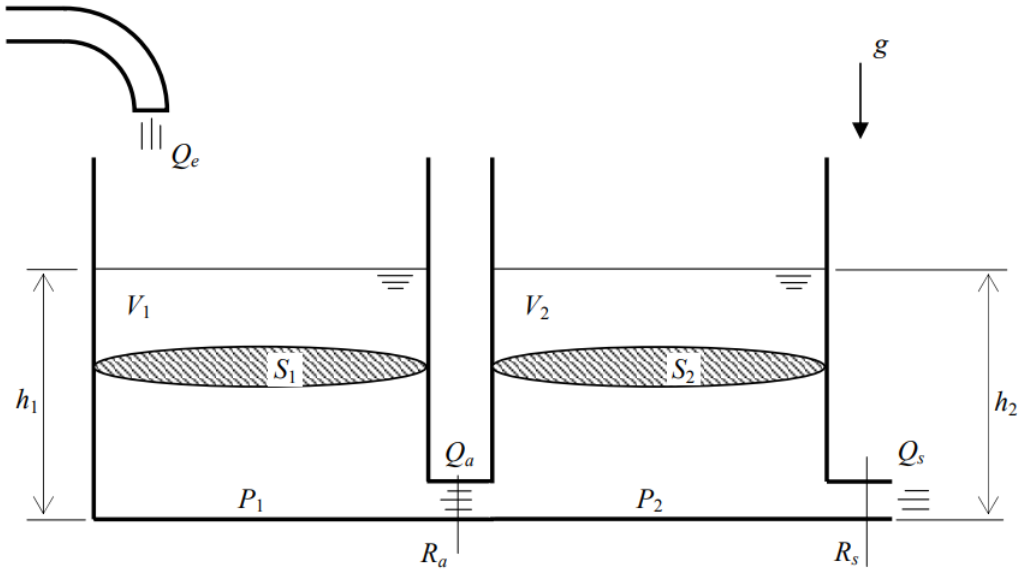


Figura 5: Modelo de um sistema de 2 reservatórios

Como desenvolvido na lista anterior, temos que este sistema pode ser aproximado pelo seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B \\ y = Cx + D \end{cases} \quad (7)$$

No qual:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2S} \sqrt{\frac{\rho g}{R(h_{10}-h_{20})}} & \frac{1}{2S} \sqrt{\frac{\rho g}{R(h_{10}-h_{20})}} \\ \frac{1}{2S} \sqrt{\frac{\rho g}{R(h_{10}-h_{20})}} & -\frac{1}{2S} \left(\sqrt{\frac{\rho g}{R(h_{10}-h_{20})}} + \sqrt{\frac{\rho g}{Rh_{20}}} \right) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Para a simulação desse sistema substituiu-se apenas os valores A, B, C e D no código descrito na página 2, pelos valores das equações 12 e 13, para as seguintes condições:

- $S_1 = S_2 = 10m^2$
- $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$
- $g = 10 \frac{m}{s^2}$
- $R_a = R_s = 2 \cdot 10^8 \frac{Pas^2}{m^6}$
- $h_{10} = 5m$
- $h_{20} = 2m$
- $h_{1i} = 0,1m$

Para \dot{h}_1 e \dot{h}_2 nulos (equilíbrio):

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho g}{R(h_{10}-h_{20})}} h_{1i} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho g}{R(h_{10}-h_{20})}} h_{2i} = Q_e \\ \left[\sqrt{\frac{\rho g}{R(h_{10}-h_{20})}} h_{1i} - \frac{1}{2S} \left(\sqrt{\frac{\rho g}{R(h_{10}-h_{20})}} + \sqrt{\frac{\rho g}{Rh_{20}}} \right) h_{2i} \right] \frac{1}{2S} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Da equação 10 retiramos $h_{2i} = 0,04494m$ e $Q_e = 0,0001124 \frac{m^3}{s}$. Obtendo o seguinte resultado:

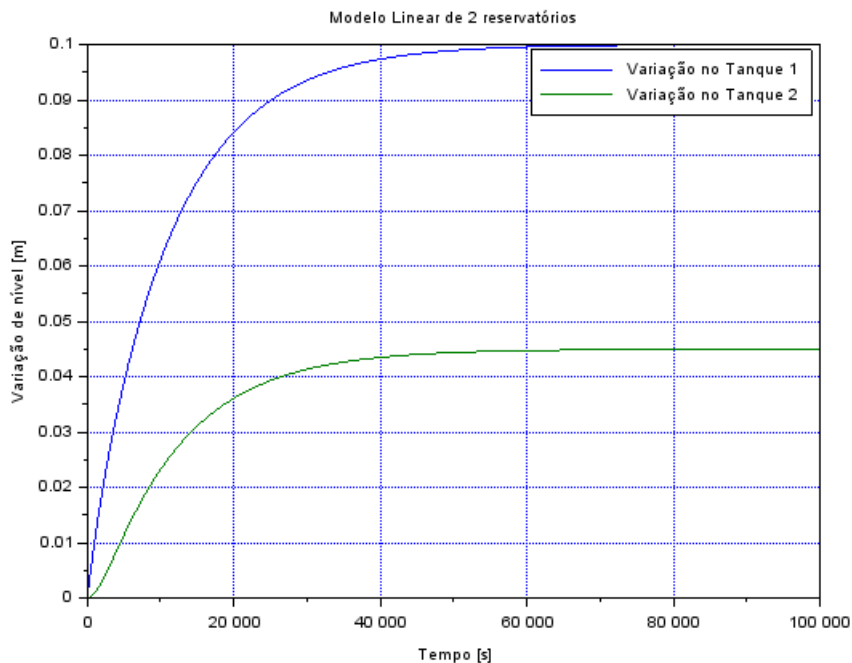


Figura 6: Simulação de um sistema de 2 reservatórios

4 Analogia do circuito elétrico

Para esta analogia, relacionamos a resistência elétrica R à área da seção do reservatório S e os fatores $\sqrt{\frac{\rho g}{R(h_{10}-h_{20})}}$ e $-\sqrt{\frac{\rho g}{Rh_{20}}}$ ao inverso das capacitâncias $\frac{1}{C_1}$ e $\frac{1}{C_2}$ respectivamente, temos então o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B \\ y = Cx + D \end{cases} \quad (11)$$

No qual:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Esta equação descreve exatamente o circuito abaixo:

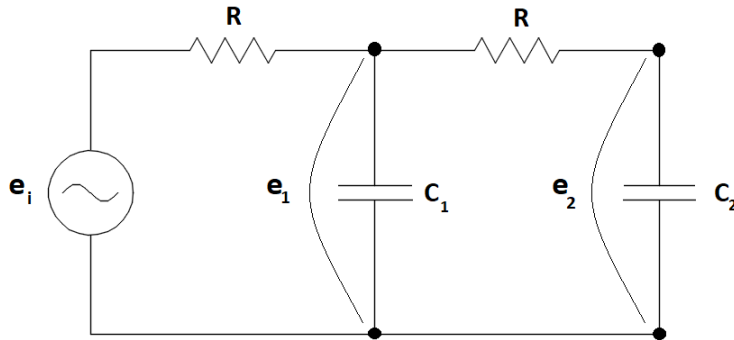


Figura 7: Circuito análogo ao sistema de 2 reservatórios

Por análise de malha podemos facilmente encontrar:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1(t)}{dt} = -\frac{Q_1(t)}{RC_1} + \frac{Q_2(t)}{RC_1} + \frac{e_i(t)}{R} \\ \frac{dQ_2(t)}{dt} = \frac{Q_1(t)}{RC_1} - \frac{Q_2(t)}{R}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) \\ e_1(t) = \frac{Q_1(t)}{C_1} \\ e_2(t) = \frac{Q_2(t)}{C_2} \end{cases} \quad (14)$$