

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

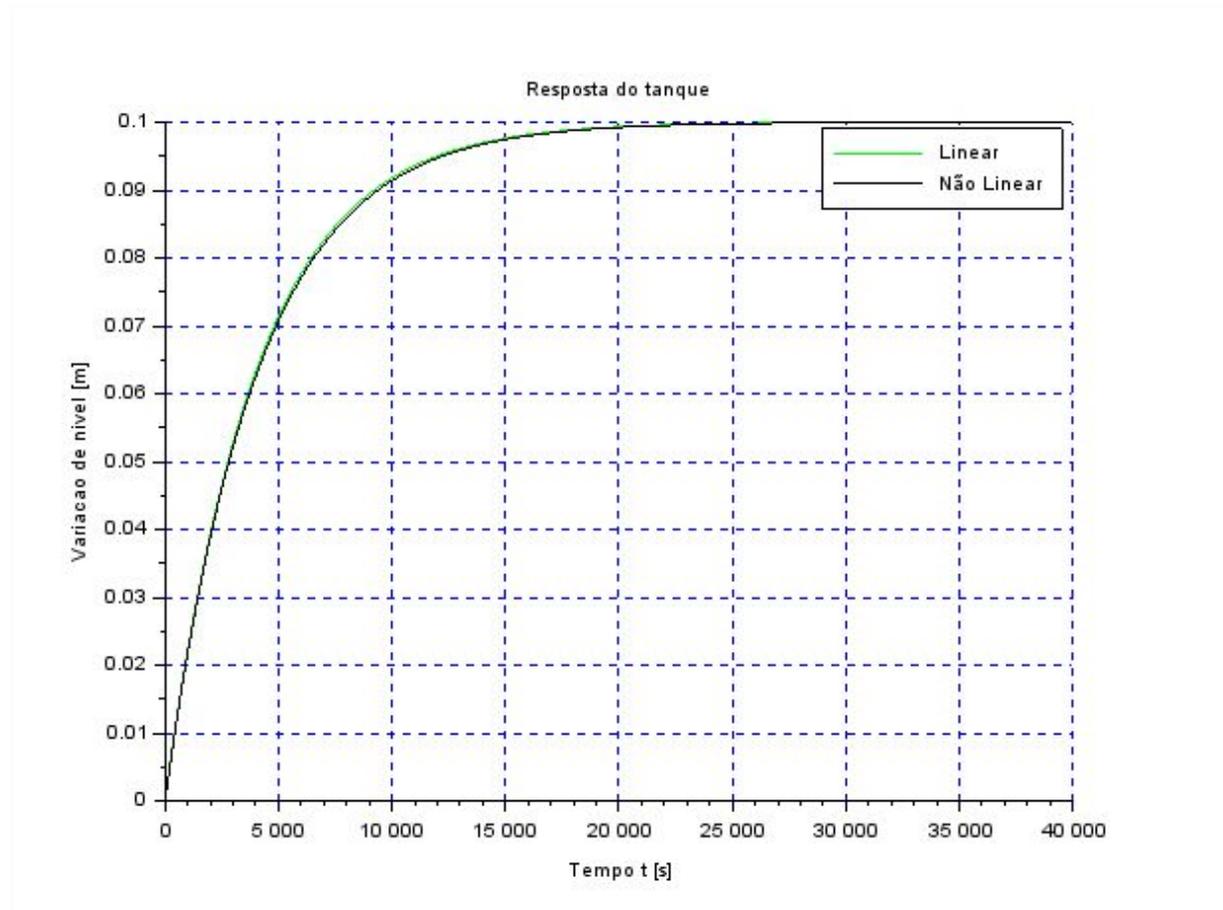
PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos
Lista D

Kevin Chu
N°USP: 10705908

São Paulo
2020

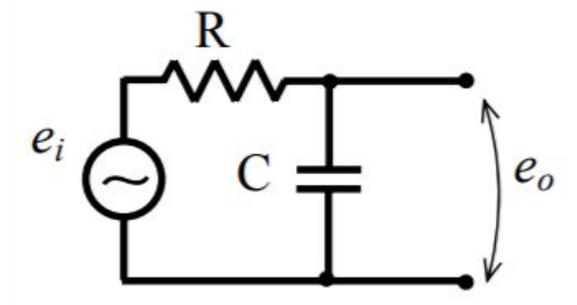
Exercício 1) Faça as modificações adequadas para se poder desenhar e comparar os gráficos da resposta do sistema não linear e linear. Faça as simulações dos sistemas linear e não linear considerando que o reservatório parte do nível $h = 2$ m, mas com vazão de entrada nula. Compare as respostas.

Desenvolvendo um programa no SciLab que realiza a simulação do sistema linearizado e não linearizado, obteve-se o seguinte resultado:



Comparando os dois gráficos, conclui-se que a linearização produz resultados muito semelhantes ao esperado do sistema não linearizado.

Exercício 2) Obtenha o modelo matemático do circuito elétrico mostrado abaixo e compare com o modelo linear do sistema com um reservatório. Faça simulações e compare qualitativamente com os resultados do exercício 1 (sistema linear).



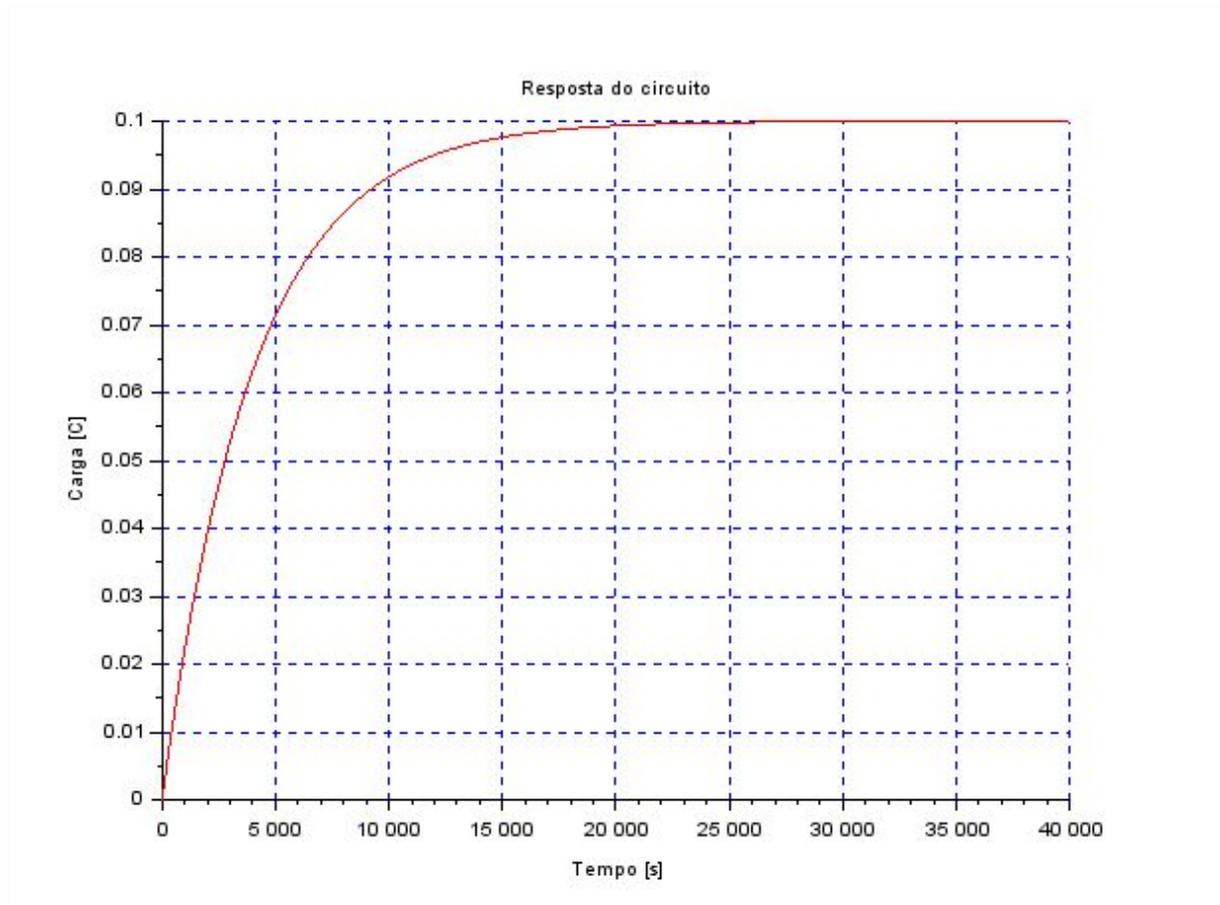
Aplicando a lei de Kirchhoff para a malha do circuito acima:

$$RI = -\frac{1}{C} \int I dt + e_i - e_0$$

Substituindo $\dot{q} = I$ e $e_0 = 0$:

$$\dot{q} = \frac{e_i}{R} - \frac{q}{RC}$$

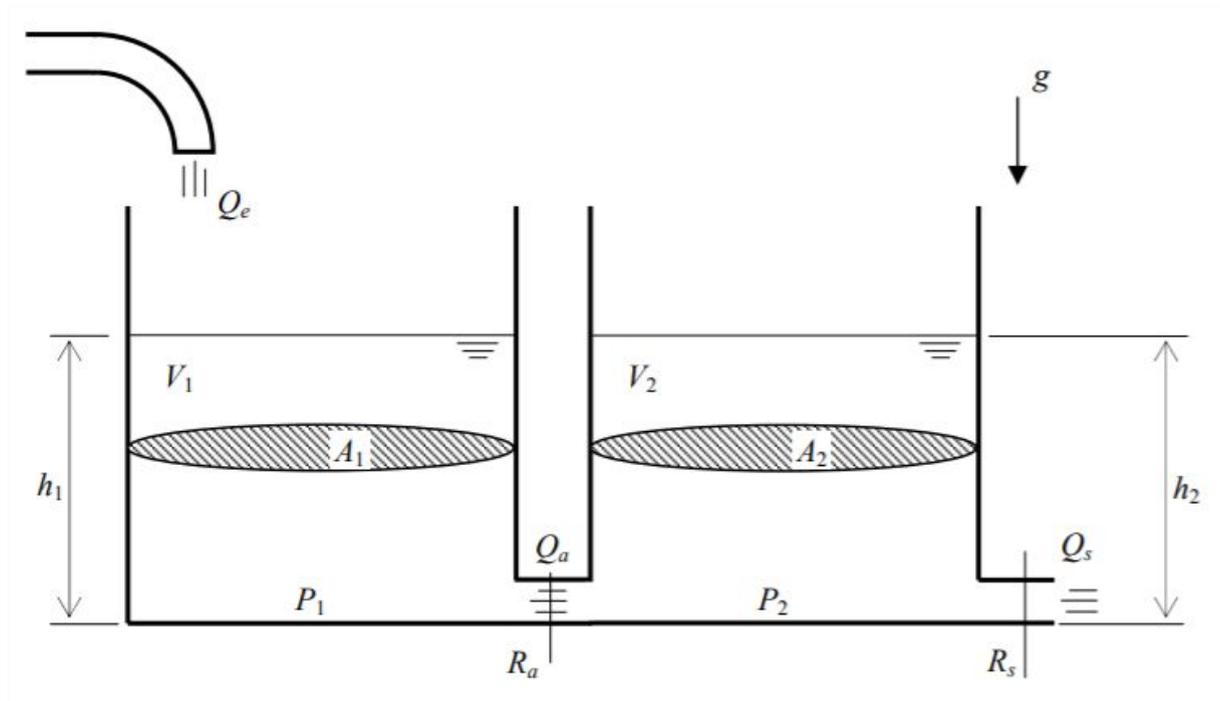
Utilizando a equação do sistema elétrico obtida, chegou-se no seguinte resultado:



Observando o gráfico da variação da carga do circuito, determina-se que ele corresponde ao gráfico obtido no exercício 1, confirmando a equivalência do sistema elétrico com o sistema inicial.

Lição de casa:

1) Faça a simulação do sistema com dois reservatórios, supondo o modelo linear:



Considerando o sistema de equações diferenciais que descrevem a altura da água em dois reservatórios:

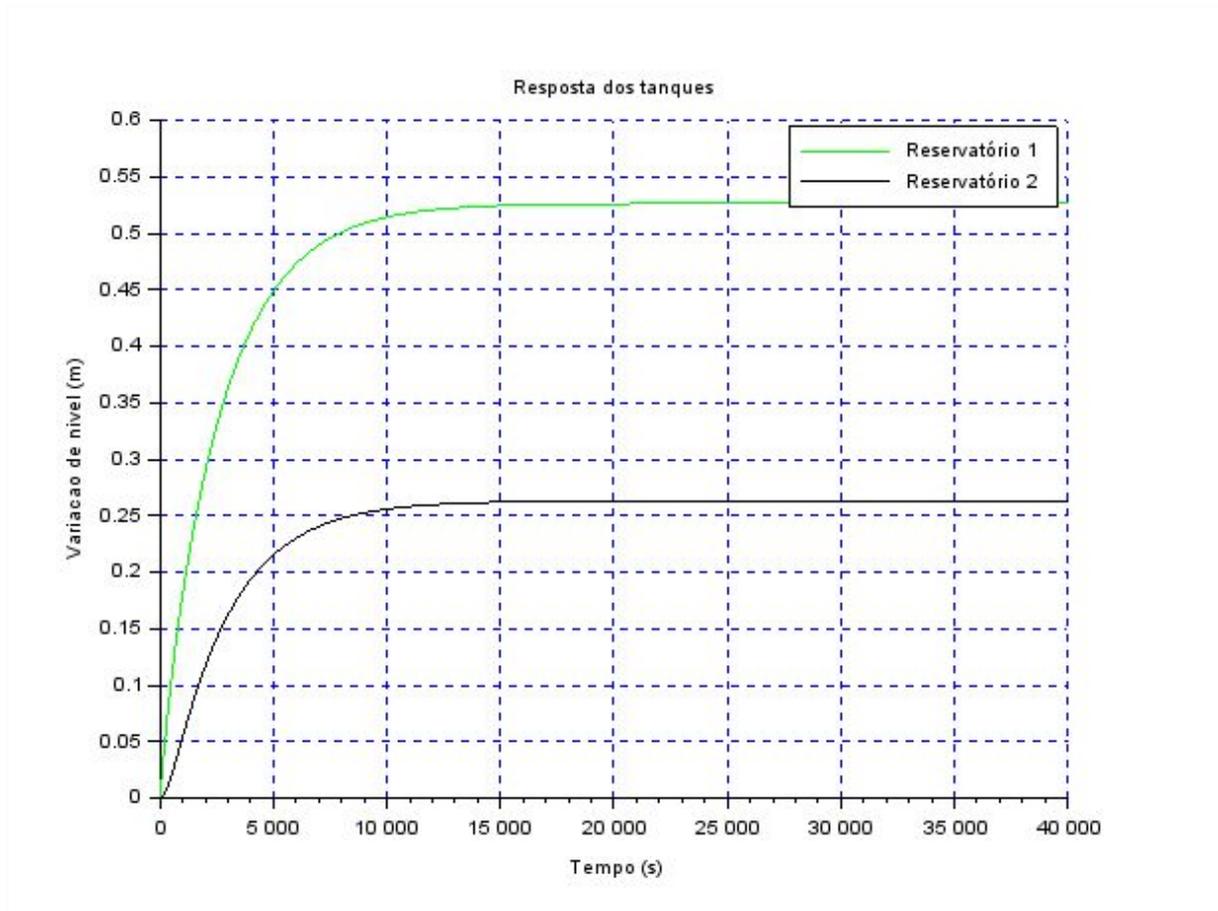
$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \left[Q_e - \sqrt{\frac{\rho g}{R_a}} (h_1 - h_2) \right] \frac{1}{S_1} \\ \dot{h}_2 = \left[\sqrt{\frac{\rho g}{R_a}} (h_1 - h_2) - \sqrt{\frac{\rho g}{R_s}} h_2 \right] \frac{1}{S_2} \end{cases}$$

Modela-se o sistema linearizado pelas matrizes:

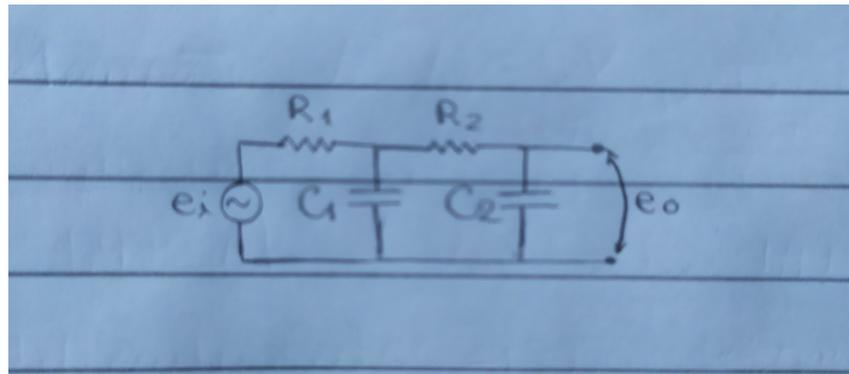
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2S_1} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o}-h_{2o})}} & \frac{1}{2S_1} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o}-h_{2o})}} \\ \frac{1}{2S_2} \sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o}-h_{2o})}} & -\frac{1}{2S_2} \left(\sqrt{\frac{\rho g}{R_a(h_{1o}-h_{2o})}} + \sqrt{\frac{\rho g}{R_s h_{2o}}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Assim, foi possível obter os gráficos a seguir:



2) Desenvolva um circuito elétrico análogo ao sistema com dois reservatórios.



Códigos

Ex. 1)

```
clear all
// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada
// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B=1/S;
C=1;
D=0;
tanquelin=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema e contínuo no tempo
// Definir o vetor de instantes de tempo:
t=0:10:40000;
// Definir a condicao inicial:
x0=0; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanquelin,x0);
// Definir a funcao do sistema nao linear
function [hdot]=tanque(t, h, Qe)
hdot=(Qe(t)-sqrt(rho*g*h/R))/S;
endfunction
// Definir funcao de entrada
function [u]=entrada(t)
u=Qei;
endfunction
Qei=sqrt(rho*g*(ho+hi)/R) // Vazao na entrada
// Simulando o sistema nao linear usando ode
h=ode(ho,t(1),t,list(tanque,entrada))
// Plotando os resultados
plot2d(t,y,3); // Sistema linear
plot2d(t,h-ho); // Sistema nao linear
// Colocando legendas
legend("Linear","Não Linear")
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle("Resposta do tanque","Tempo t [s]","Variacao de nivel [m]");
// Colocando uma grade azul no grafico:
xgrid(2)
```

Ex. 2)

```
clear all
// Parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ei=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [V] tensao na entrada
// Sistema linear:
c = S/(rho*g);
Rcirc = 2*R/(rho*g)^0.5;
A=-1/(c*Rcirc);
B=1/S;
C=1;
D=0;
circuito=syslin('c',A,B,C,D);
// Condição inicial:
e0=0;
// Vetor de instantes de tempo:
t=0:10:40000;
// Vetor de entradas:
u=ei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,circuito,e0);
// Plotando o resultado em vermelho:
plot2d(t,y,5)
xlabel("Resposta do circuito","Tempo [s]","Carga [C]");
xgrid(2)
```

1)

```
clear all
// Parametros:
S1=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio 1
S2=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio 2
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
Ra=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
Rs=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/((ho-hi)*Ra)) // [m^3/s] vazao na entrada
h10=Qei^2/(rho*g)*(Ra+Rs) // [m] nivel do reservatorio 1 na condicao inicial
h20=Qei^2*Rs/(rho*g) // [m] nivel do reservatorio 2 na condicao inicial
// Sistema linear:
A=[-1/(2*S1)*sqrt(rho*g/(Ra*(h10-h20))),1/(2*S1)*sqrt(rho*g/(Ra*(h10-h20))),1/(2*S2)*sqrt(rho*g/(Ra*(h10-h20))),
-1/(2*S2)*(sqrt(rho*g/(Ra*(h10-h20)))+sqrt(rho*g/(Rs*(h20))))];
B=[1/S1;0];
C=[1,0;0,1];
D=[0;0];
tanque=syslin('c',A,B,C,D);
// Condicao inicial:
x0=[0;0];
// Vetor tempo:
t=0:10:40000
// Vetor de entrada:
u=Qei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,x0);
// Plotando os resultados:
plot2d(t,y(1,:),3)
plot2d(t,y(2,:))
legend('Reservatório 1','Reservatório 2')
xlabel("Resposta dos tanques","Tempo (s)","Variacao de nivel (m)");
xgrid(2)
```