PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Escola Politécnica da USP

Lista D

Professores: Dr. Décio Crisol Donha
Dr. Agenor T. Fleury

Aluno: Arthur Henrique Gomes de Pinho
N°USP:10379756

2020

INTRODUÇÃO

Essa lista objetiva realizar a simulação numérica de sistemas lineares compostos por equações diferenciais (equações de estado) e equações algébricas (equações de saída).

EXEMPLO

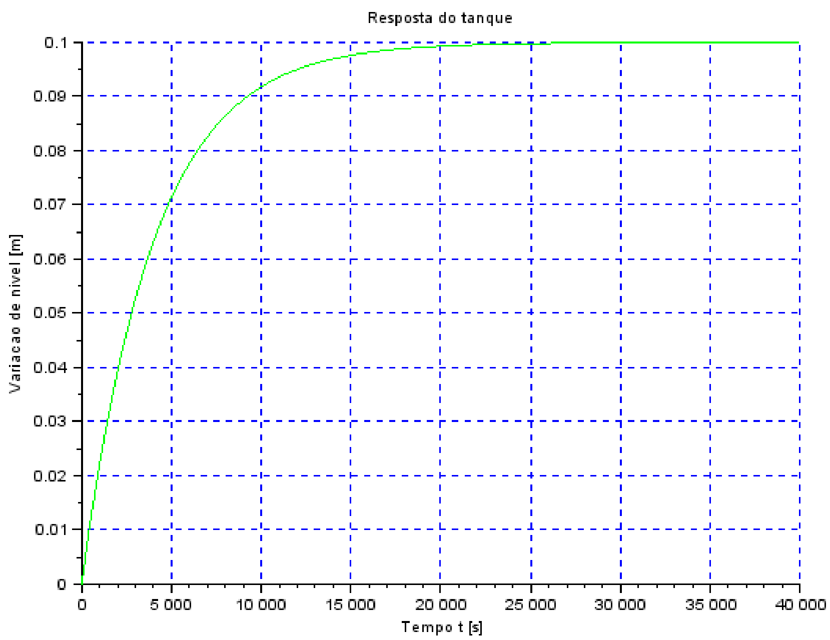
Foi implementado um programa para realizar a solução numérica do seguinte sistema linear:

$$\dot{x} = \underbrace{-\frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{Rh_o}}}_{A}x + \underbrace{\frac{1}{S}}_{B}u \qquad \text{(equações diferenciais)}$$

$$y = \underbrace{+1}_{C}x + \underbrace{0}_{D}u \qquad \text{(equações algébricas)}$$

A curva expressa no gráfico 1 é o resultado da execução da simulação.

Gráfico 1 - Simulação numérica de sistema linear



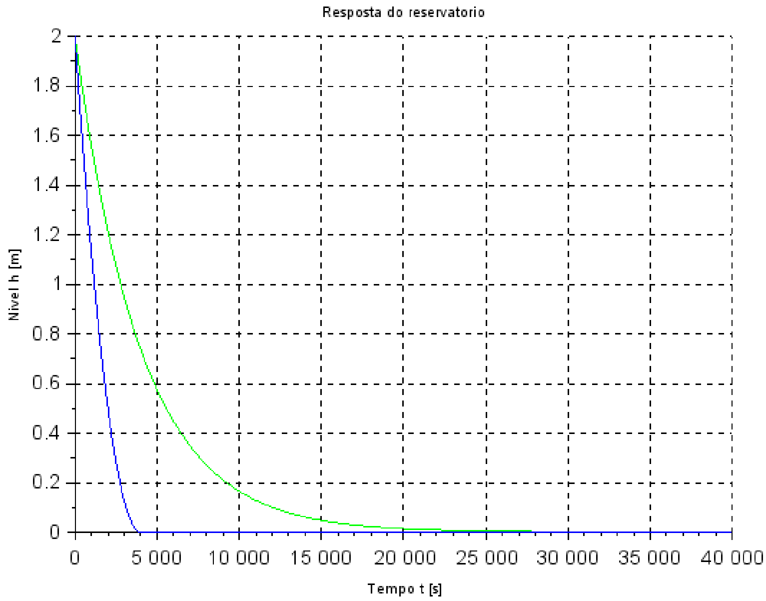
Código Scilab:

```
// Simulacao de sistema linear
// Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear all
// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada
// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B=1/S;
C=1;
D=0;
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
// continuo no tempo
// Definir a condicao inicial:
x0=0; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
// Definir o vetor de instantes de tempo:
t=0:10:40000;
// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,x0);
// Plotando o resultado em verde:
plot2d(t,y,3)
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle("Resposta do circuito elétrico","Tempo t [s]","Carga [C]");
// Colocando uma grade azul no grafico:
xgrid(2)
```

EXERCÍCIO 1

Foi possível comparar as simulações não-lineares e as lineares a partir de algumas alterações no código do exemplo anterior usando as seguintes condições iniciais: nível inicial do tanque = 2m e vazão de entrada nula. A diferença entre o comportamento das duas curvas é causada pela linearização realizada, já que simplificações foram assumidas que acabaram não retratando com precisão o comportamento real do sistema. Os resultados foram apresentados no gráfico 2, a linha verde representa a simulação linear, e a linha azul a simulação não-linear.

Gráfico 2 - Comparação entre modelo linear e não linear



Código Scilab:

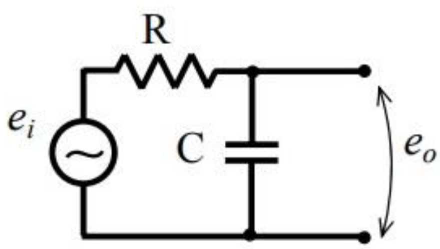
```
// Definicao da funcao que implementa a equacao nao linear
function [hdot]=tanque(t, h, Qe)
hdot=(-sqrt(rho*g*h/R)+Qe(t))/S
endfunction

// Definicao da funcao que implementa a entrada Qe:
function [u]=entrada(t)
u=Qei;
endfunction

// Simulacao de sistema linear
// Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear all
clc
// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1e-2)*(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada
// Definir a condicao inicial:
h0=2; // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial
// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B=1/S;
C=1;
D=0;
tanquelin=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
 // continuo no tempo
// Definir a condicao inicial:
x0=2; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
// Definir o vetor de instantes de tempo:
t=0:10:40000;
// Definir o vetor de entradas:
```

```
u=Qei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanquelin,x0);
// Plotando o resultado em verde:
plot2d(t,y,3)
// Colocando uma grade no grafico:
xgrid(0)

// Comando que realiza a simulacao numérica nao linear:
h=ode(h0,t(1),t,list(tanque,entrada));  // h eh o nivel do reservatorio [m]
// Plotando o resultado em azul:
plot2d(t,h,2)
// Definindo uma variavel do tipo 'lista':
T=list("Resposta do reservatorio","Tempo t [s]","Nivel h [m]");
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle(T(1),T(2),T(3));
```

EXERCÍCIO 2

Foi proposto a definição do modelo matemático do circuito elétrico mostrado abaixo e sua comparação com o modelo linear do sistema de um reservatório. Foram feitas simulações e comparações com os resultados do exercício 1 após a determinação do modelo.

Figura 1 - Circuito elétrico



As leis de Kirchoff foram usadas para determinação do modelo matemático:

$$e_i = R.i + e_0$$

A capacitância é definida como:

$$e_0 = q/C$$

Dado que i é a divisão de carga por tempo, conclui-se que:

$$e_i = R.\dot{q} + \frac{q}{C}$$

$$\dot{q} = -\frac{q}{RC} + \frac{e_i}{R}$$

Dada a equação linear do modelo com reservatório dada por:

$$\dot{x} = \underbrace{-\frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{Rh_o}}}_{A}x + \underbrace{\frac{1}{S}}_{B}u$$

É possível notar que ambas as equações podem ser escritas no modo geral $\dot{x} = Ax + B$.

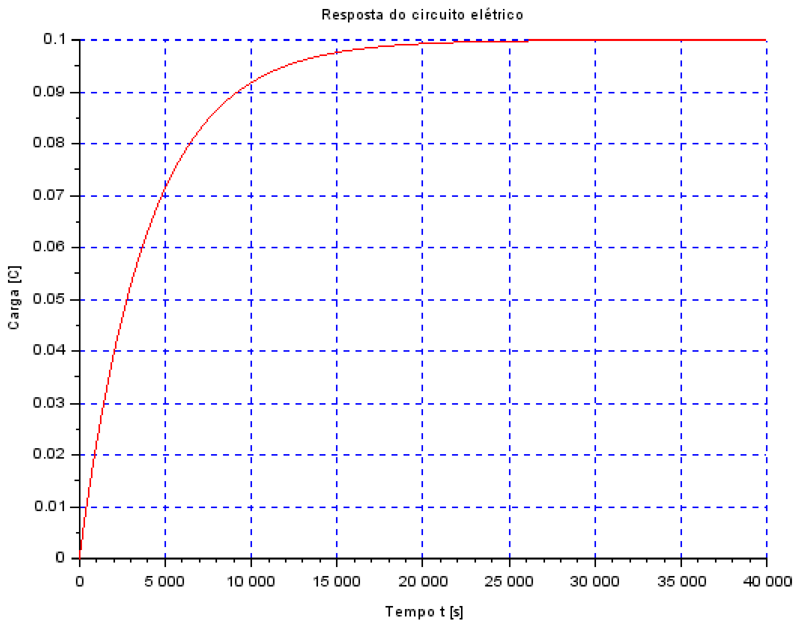
Dessa forma, o modelo matemático apresenta semelhanças e percebe-se que há relações entre as variáveis, que são definidas da seguinte forma:

- Carga do circuito (q) com a posição do nível do reservatório (x);
- Resistencia (R) com a área da secção transversal (S);
- O inverso da capacitância (C) com $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{Rh_o}}$;
- A tensão de alimentação (e_i) com a vazão de entrada (u).

Seguindo as analogias definidas e simulando o sistema chega-se no resultado mostrado no gráfico 3, que relaciona a carga do circuito em relação ao tempo.

A resposta do sistema é a mesma, já que há uma igualdade na solução da equação diferencial.

Gráfico 3 - Resposta do Circuito elétrico



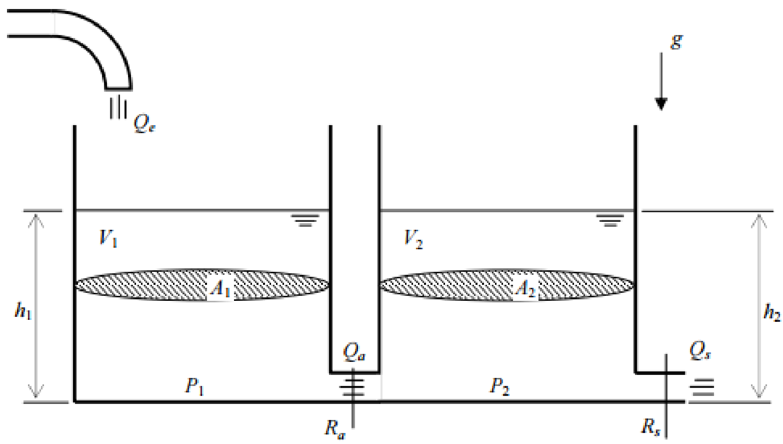
Código Scilab:

```
// Simulacao de sistema linear
// Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear all

S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada

// Equivalência para sistema elétrico:
ei=Qei; //Tensão de alimentação
Res=S; //Resistencia do sistema
C=1/((1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho)));

// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A = (-1/(2*Res))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B=1/Res;
C=1;
D=0;
circuito=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
 // continuo no tempo
// Definir a condicao inicial:
x0=0; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
// Definir o vetor de instantes de tempo:
t=0:10:40000;
// Definir o vetor de entradas:
u=ei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
```

LIÇÃO DE CASA 1

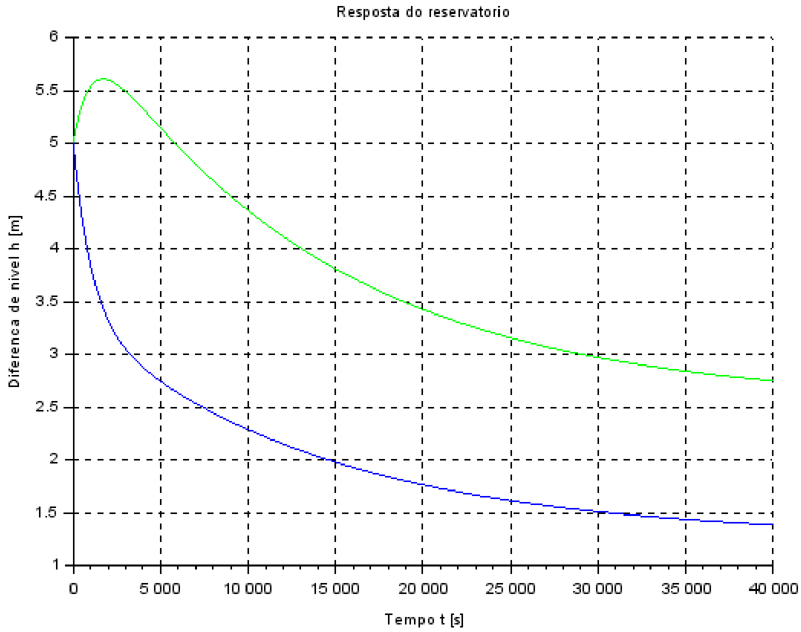
Foi proposto a simulação do sistema com dois reservatórios a seguir, mostrado na figura 2 utilizando o modelo linear visto no exemplo e no exercício 1.

Figura 2 - Sistema de dois reservatórios



Seguindo as seguintes condições iniciais: h1 = 5m e h2 = 5m, e simulando, obtêm-se o gráfico 4, em que a linha verde representa a altura do reservatório 1 e a linha azul representa a altura do reservatório 2.

Gráfico 4 - Respostas dos dois reservatórios da figura 2



Código Scilab:

```
// Simulacao de sistema linear
// Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear all
clc

// Definir parametros:
S1=20; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
S2=20;
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
Ra=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
Rb=2*10^8;
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/((h0-hi)*Ra)); // [m^3/s] vazao na entrada
// Definir a condicao inicial:
h10=(Ra+Rb)*Qei^2/(rho*g); // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial
h20=Rb*Qei^2/(rho*g);
// Definir o sistema linear para o sistema usando o comando syslin:
A=[(-1/(2*S1))*sqrt(rho*g/(Ra*h10)) (1/(2*S1))*sqrt(rho*g/(Ra*h20));
  (1/(2*S2))*sqrt(rho*g/(Ra*h10)) (-1/(2*S2))*sqrt(rho*g*(Ra+Rb)/(Ra*Rb*h20))];
B=[1/S;0];
C=[1 0;0 1];
D=[0;0];
tanquelin=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
 // continuo no tempo
// Definir a condicao inicial:
x0=[5;5]; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
// Definir o vetor de instantes de tempo:
t=0:10:40000;
// Definir o vetor de entradas:
u=Qe*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
```

```
[y,x]=csim(u,t,tanquelin,x0);
// Plotando o resultado em verde reservatório 1:
plot2d(t,y(1,:),3)
// Plotando o resultado em azul reservatório w:
plot2d(t,y(2,:),2)
// Colocando uma grade no grafico:
xgrid(0)
// Definindo uma variavel do tipo 'lista':
T=list("Resposta do reservatorio","Tempo t [s]","Diferenca de nivel h [m]");
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle(T(1),T(2),T(3));
```