

PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

João Otávio Tanaka de Oliveira

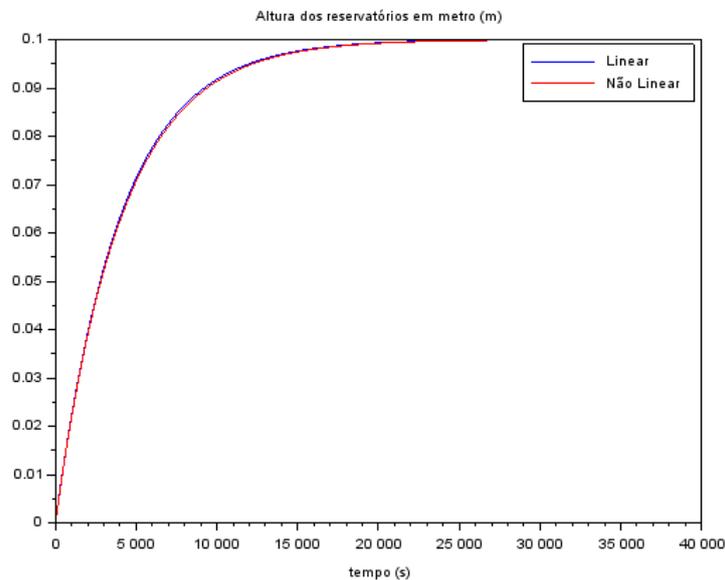
NUSP – 10772842

1.0 EXERCÍCIOS

1.1 EXERCÍCIO 1

“Faça as modificações adequadas para se poder desenhar e comparar os gráficos da resposta do sistema não linear e linear. Faça as simulações dos sistemas linear e não linear considerando que o reservatório parte do nível $h = 2$ m, mas com vazão de entrada nula. Compare as respostas.”

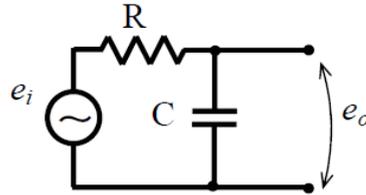
Logo, foram feitas as alterações para que fosse possível comparar os resultados obtidos de modo linear e não linear. Obteve-se o seguintes gráfico:



Como pode-se perceber, os resultados são bem próximos.

1.2 EXERCÍCIO 2

“Obtenha o modelo matemático do circuito elétrico mostrado abaixo e compare com o modelo linear do sistema com um reservatório. Faça simulações e compare qualitativamente com os resultados do exercício 1 (sistema linear).”



A dedução da equação diferencial e sua resolução estão abaixo:

21

Lei das Malhas:

$$e_i - R \cdot i - \frac{1}{C} \int i \, dt$$
$$h = \int i \, dt \quad \therefore h = i$$

$$e_i - R h - \frac{1}{C} h = 0$$

$$R h + \frac{1}{C} h = e_i$$

$$R \frac{dh}{dt} + \frac{1}{C} h = 0 \Rightarrow R \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{C} h$$

$$RC \frac{1}{h} dh = - dt \Rightarrow RC \int \frac{1}{h} dh = - \int dt$$

$$RC \ln h = -t + C_1 \Rightarrow \ln h = \frac{-t + C_1}{RC}$$

$$h = C_2 e^{-t/RC}$$

$\frac{dh}{dt}$ no $\infty \Rightarrow 0$

$$RC \frac{1}{C} h = e_i \therefore h = C_2 e_i$$

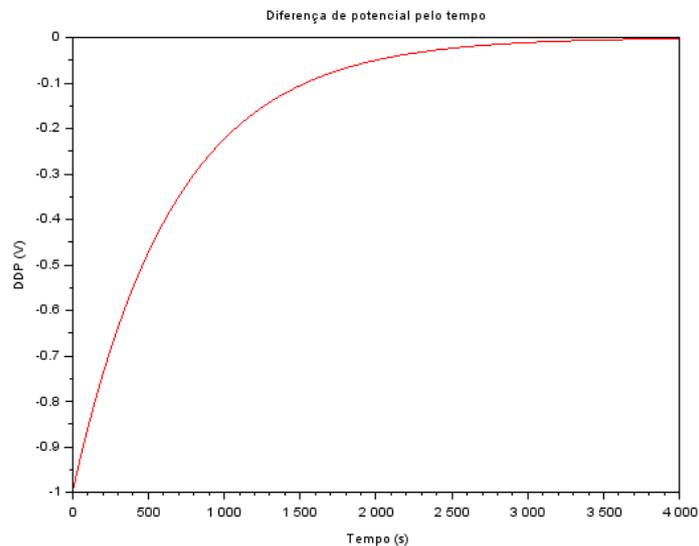
$$\therefore h(t) = C_1 e^{-t/RC} + C_2 e_i$$

$$i(t) = h(t) = C_1 \cdot \frac{1}{RC} \cdot e^{-t/RC} = \frac{C_1}{RC} \cdot e^{-t/RC}$$

Com $V(0) = e_0 \Rightarrow C_1 = C_2 e_0$

$$\therefore i(t) = \frac{e_0}{R} e^{-t/RC} \therefore V(t) = e_0 (1 - e^{-t/RC})$$

Portanto, foi feito o gráfico da solução da EDO. Os parâmetros usados foram: $R = 10$ ohms, $C = 15 \mu\text{F}$, $e_0 = 10$ V. Obteve-se o seguinte gráfico:



Como pode-se perceber, o gráfico é muito semelhante ao gráfico do exercício 1.

2.0 LIÇÃO DE CASA

2.1 EXERCÍCIO 1

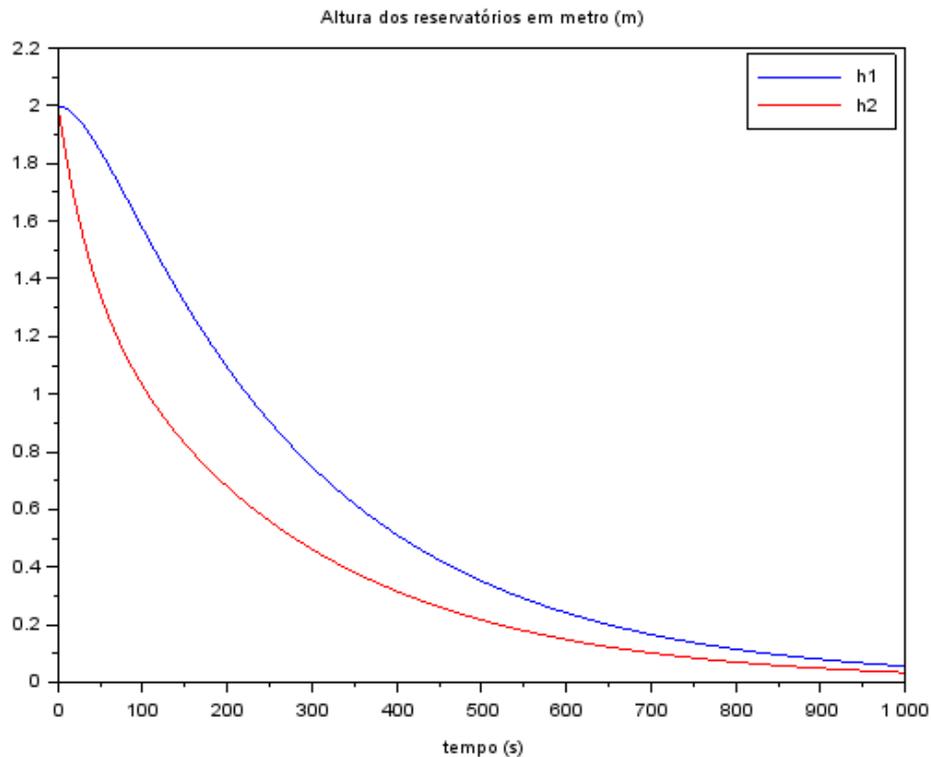
Usando a abordagem vista nestes exemplos, faça a simulação do sistema com dois reservatórios, supondo o modelo linear.

Foram usadas as seguintes condições e parâmetros:

```
//Parâmetros
S = -10.0; //área da seção transversal do tanque 1 em m^2;
R = -2*10^8; //perda de carga na tubulação do tanque 1 em Pa/(m^3/s)^2
rho = -1000.0; //massa específica da água em kg/m^3
g = -10.0; //aceleração da gravidade em m/s
ho = -2; //Altura inicial do tanque 1 em m
hi = -0.1; //Passo de integração

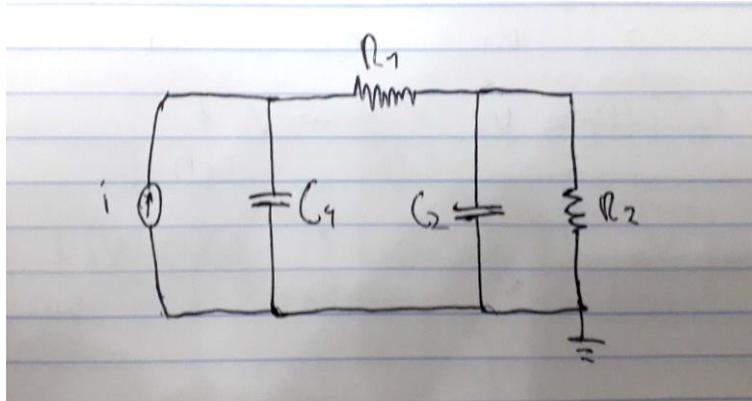
//Variáveis
Qei = (1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazão na entrada
```

Obteve-se então, o seguinte gráfico:



2.2 EXERCÍCIO 2

Desenvolva um circuito elétrico análogo ao sistema com dois reservatórios.



APÊNDICE

Código usado para comparar a solução linear com não linear:

```
// Simulacao de sistema linear
xdel(winsid())
clear all

// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada

// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B=1/S;
C=1;
D=0;
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh

//Definição da função para o sistema não linear
funcprot(0);
function [dh]=reservatorio(t, h, Qe)
    dh = (-sqrt(rho*g*h/R) + Qe(t))/S;
endfunction;

// Definir a condicao inicial:
x0=0; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio

// Definir o vetor de instantes de tempo:
t0 = 0;
t = t0:10:40000;

// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);

function [u]=vazaoentrada(t)
    u = Qei;
endfunction

Qei = sqrt(rho*g*(ho+hi)/R);

//Integração não linear por ode
F = ode('rk', ho, t0, t, list(reservatorio, vazaoentrada));
h = F(1, :);

// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,x0);

// Plotando o resultado em verde:
f1 = scf(1);
plot(t, y);
plot(t, h - ho, "red");
legend("Linear", "Não Linear")
xlabel("Variação da altura dos reservatórios em metro (m)", "tempo (s)", "")
```

Código usado para plotar o gráfico do circuito elétrico:

```
xdel(winsid())
clear

//Parâmetros
R = 10;
C = 0.015;
e0 = 10;

//Condições iniciais
t0 = 0; //Instante inicial em s
tf = 4000; //Instante final em s

//Implementação da integração numérica
t = linspace(t0, tf, 2000); //vetor do tempo

i = -(e0/R)*exp(-t/R*C);
V = e0*(1 - exp(-t/R*C));

//Plots
f1 = scf(1);
plot(t, i, "red");
xlabel("Diferença de potencial pelo tempo", "Tempo (s)", "DDP (V)")
```

Código usado para simular os dois reservatórios com método linear:

```
xdel(winsid())
clear

//Parâmetros
S = 10.0; // área da seção transversal do tanque 1 em m^2;
R = 2*10^8; // perda de carga na tubulação do tanque 1 em Pa/(m^3/s)^2
rho = 1000.0; // massa específica da água em kg/m^3
g = 10.0; // aceleração da gravidade em m/s
ho = 2; //Altura inicial do tanque 1 em m
hi = 0.1; //Passo de integração

//Variáveis
Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada

// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=[-rho*g/(2*S*Qei*R), rho*g/(2*S*Qei*R); rho*g/(2*S*Qei*R), -rho*g/(S*Qei*R)]
B=[1/S; 0];
C= [1,0;0,1];
D=[0;0];
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh

// Definir a condicao inicial:
x01=0; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
x02=0;

// Definir o vetor de instantes de tempo:
t0 = 0;
t = t0:10:1000;

// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);

// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,[2; 2]);

h1 = x(1, :);
h2 = x(2, :);

V1 = S.*h1; // Volume do tanque 1 em m^3
V2 = S.*h2; // Volume do tanque 2 em m^3
P1 = rho.*g.*h1 //Pressão relativa à atmosférica no fundo do reservatório 1 em Pa
P2 = rho.*g.*h2 //Pressão relativa à atmosférica no fundo do reservatório 2 em Pa

//Plots
f1 = scf(1);
plot(t, h1);
plot(t, h2, "red");
legend("h1", "h2")
xlabel("Altura dos reservatórios em metro (m)", "tempo (s)", "")
```