

## 1. Questões

1 - Faça as modificações adequadas para se poder desenhar e comparar os gráficos da resposta do sistema não linear e linear. Faça as simulações dos sistemas linear e não linear considerando que o reservatório parte do nível  $h = 2$  m, mas com vazão de entrada nula. Compare as respostas.

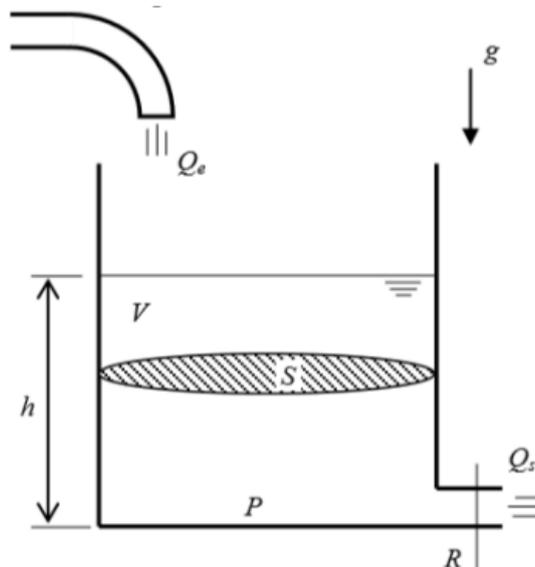


Figura 1: Sistema com um reservatório

Os parâmetros utilizados foram os seguintes:

$S = 10 \text{ m}^2$	Área da seção transversal do reservatório
$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$	Massa específica da água
$g = 10 \text{ m/s}^2$	Aceleração da gravidade
$R = 2 * 10^8 \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	Parâmetro que relaciona pressão e vazão
$h_0 = 2 \text{ m}$	Nível do reservatório em regime
$h_i = 0.1 \text{ m}$	Nível adicional desejado
$Q_{ei} = 0 \text{ m}^3/\text{s}$	Vazão na entrada
$h_0 = 2 \text{ m}$	Nível do reservatório na condição inicial

E as equações para o sistema linearizado foram:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2S} \sqrt{\frac{\rho g}{Rh_0}} x + \frac{1}{S} u$$

$$y = x$$

E para o não linear:

$$\dot{h} = \left( -\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e \right) \frac{1}{S}$$

Observa-se, pelos resultados, que há uma diferença entre a progressão do sistema linear com o não linear. Isso ocorre, pois o sistema linear representa bem o resultado perto do ponto de equilíbrio. Os resultados obtidos são mostrados a seguir:

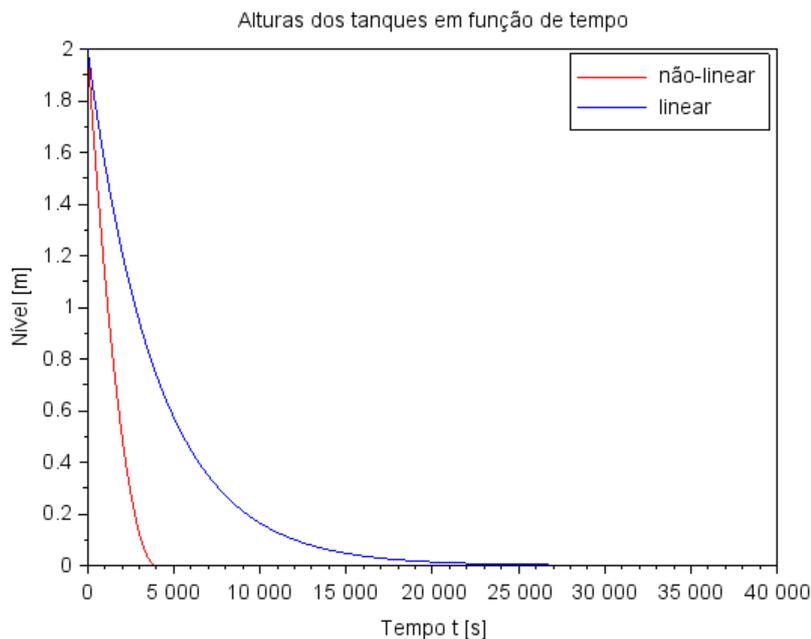


Figura 2: Resultados do primeiro exercício

2 - Obtenha o modelo matemático do circuito elétrico mostrado abaixo e compare com o modelo linear do sistema com um reservatório. Faça simulações e compare qualitativamente com os resultados do exercício 1 (sistema linear).

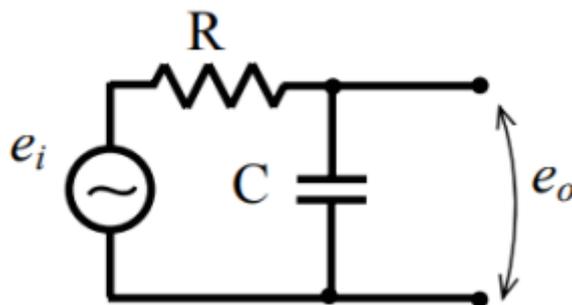


Figura 3: Sistema elétrico equivalente

Pela lei das malhas, podemos calcular a equação diferencial:

$$e_i - RI - \frac{I}{CD} = 0$$

## PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

### Lista D - Bruno Akira Oshiro (10771667)

Portanto, substituindo  $\frac{I}{D}$  por  $q$ :

$$\dot{q} = -\frac{q}{CR} + \frac{e_i}{R}$$

Equação que se assemelha muito a equação linear do tanque. Valendo as equivalências:

- $-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho g}{R_f h_0}} = \frac{1}{C}$
- $S = R$
- $u = e_i$
- $x = q$

Assim, simulando o sistema com as equivalências, os parâmetros são:

- $R = 10$
- $\frac{1}{C} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho g}{R_f h_0}} = -\frac{1}{400}$

Dessa forma, chega-se ao seguinte resultado:

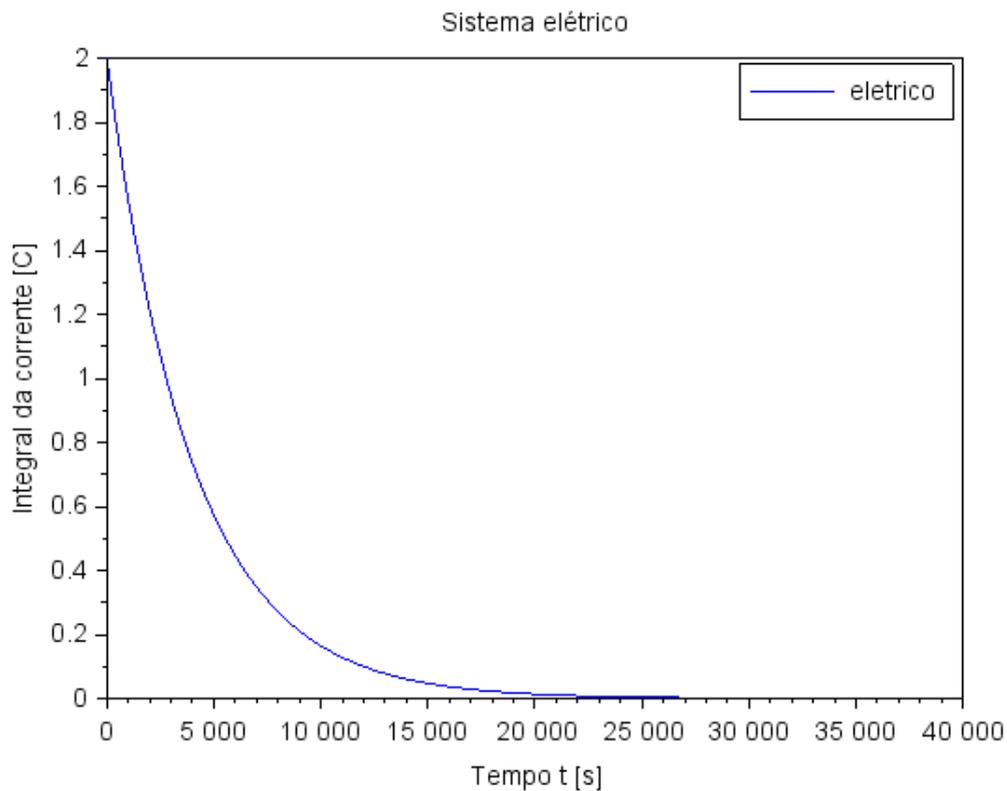


Figura 4: Simulação do sistema elétrico

3 - Usando a abordagem vista nestes exemplos, faça a simulação do sistema com dois reservatórios, supondo o modelo linear:

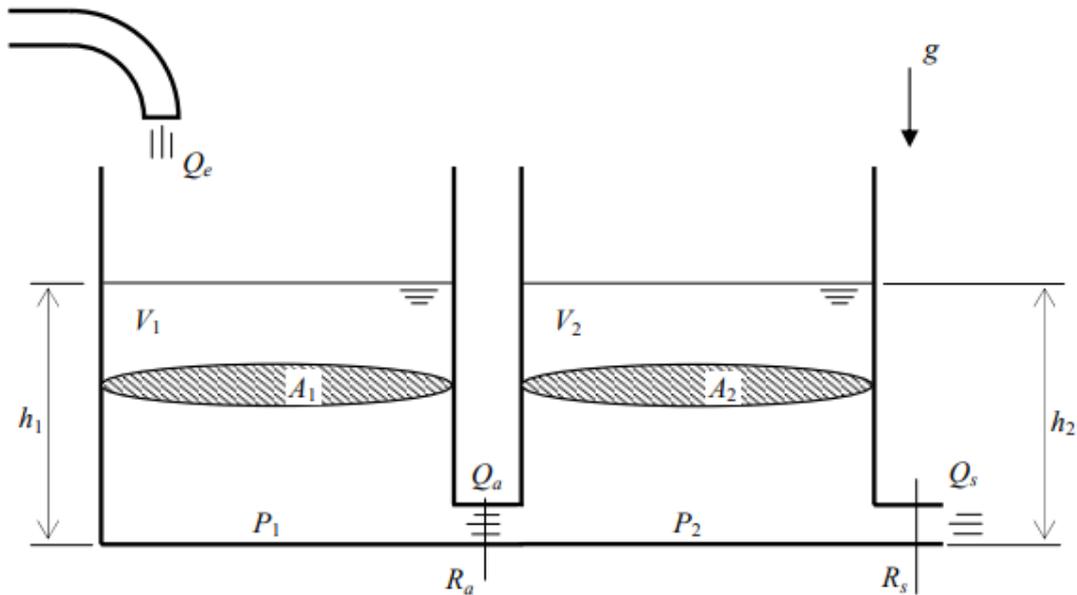


Figura 5: Sistema com dois reservatórios

Sabemos que as equações que modelam esse sistema são:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Em que:

$$A = \frac{\rho g}{2Q_e} \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1 R_a} & \frac{1}{S_1 R_a} \\ \frac{1}{S_2 R_a} & -\frac{1}{S_2} \left[ \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_s} \right] \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

## PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

### Lista D - Bruno Akira Oshiro (10771667)

Simulou-se o sistema com os seguintes parâmetros:

$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$	massa específica da água
$g = 10 \text{ m/s}^2$	gravidade
$Ra = 2 * 108 \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	parâmetro que relaciona pressão e vazão
$Rs = 2 * 108 \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	parâmetro que relaciona pressão e vazão
$S1 = 10 \text{ m}^2$	Área da seção transversal do reservatório 1
$S2 = 10 \text{ m}^2$	Área da seção transversal do reservatório 2
$ho = 2 \text{ m}$	Nível do reservatório em regime

Dessa forma, simulou-se o sistema com dois reservatórios para  $h_{0_1} = 2\text{m}$  e  $h_{0_2} = 6\text{m}$ . Observa-se que o tanque 1 começa a esvaziar apenas quando o nível do tanque 2 atinge a mesma altura, isso ocorre, por conta da igualdade de pressão entre o fundo dos dois reservatórios. A partir que a pressão no tanque 2 fica menor que em 1 ocorre a de saída do tanque 1.

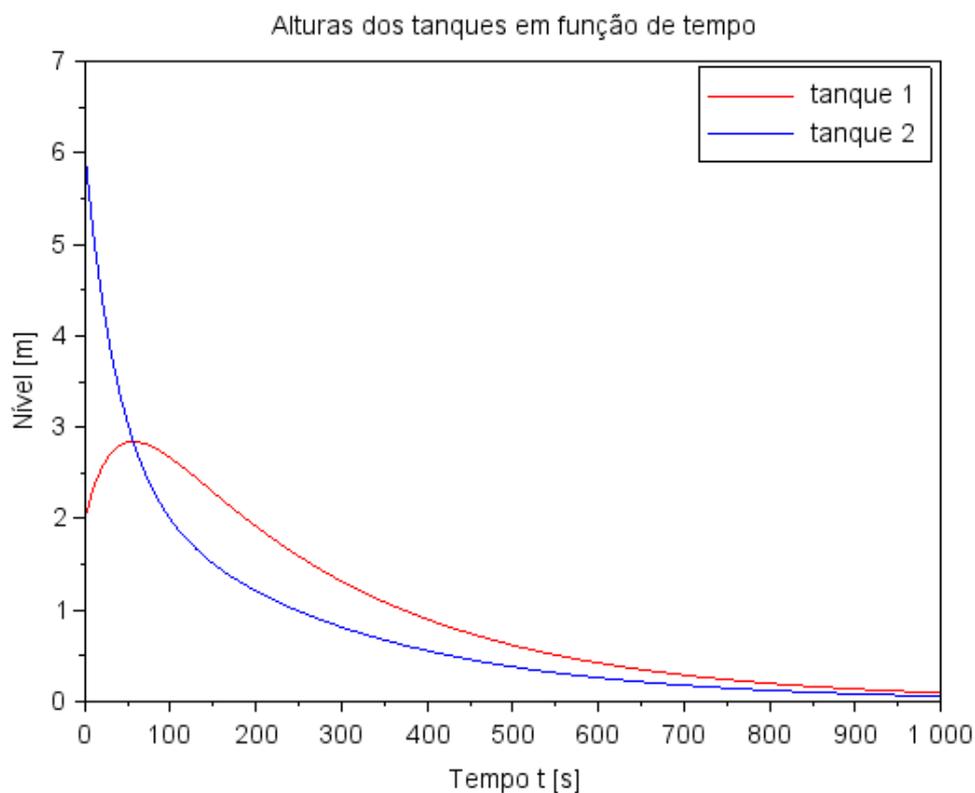
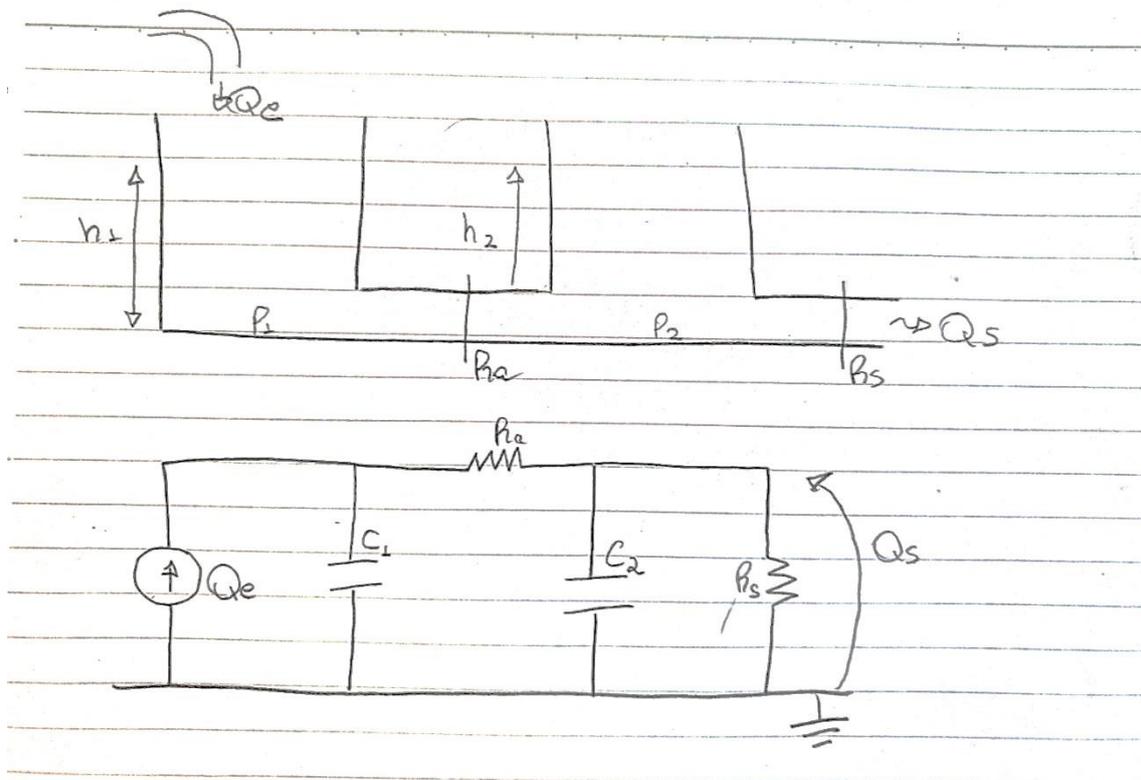


Figura 6: Simulação do sistema com dois reservatórios

4 - Desenvolva um circuito elétrico análogo ao sistema com dois reservatórios.



## 2. Códigos utilizados

Todos os códigos foram utilizados no Scilab.

### 1 - Questão 1

```
// Simulacao de sistema linear
// Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear all

//-----
// Definicao da funcao que implementa a equacao nao linear
function [hdot]=tanque(t, h, Qe)
hdot=(-sqrt(rho*g*h/R)+Qe(t))/S
endfunction

// Definicao da funcao que implementa a entrada Qe:
function [u]=entrada(t)
u=Qei;
// supondo o exemplo, u=K1*sin(w*t)+K2*t^(-2)
endfunction

//-----
// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
```

# PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

## Lista D - Bruno Akira Oshiro (10771667)

```
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=1e-6; // [m^3/s] vazao na entrada
// Definir o vetor t de instantes de tempo:
t=0:10:40000; // vetor de tempo. Observe que t(1) eh o instante inicial
// Definir a condicao inicial:
h0=2; // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial
//-----

//Para a solução não linear
// Comando que realiza a simulacao numerica:
h=ode(h0,t(1),t,list(tanque,entrada)); // h eh o nivel do reservatorio [m]

//-----

//Para o sistema linear
// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B=1/S;
C=1;
D=0;
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
// continuo no tempo
// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,h0);

//-----

// Plotando o resultados:
plot(t,h,"r",t,y,'b');
legend(["não-linear";"linear"]);
b=gce();
b.font_size=3
xlabel("Alturas dos tanques em função de tempo","Tempo t [s]","Nível [m]");
a=gca();
fonte=3
a.font_size=fonte
a.x_label.font_size=fonte
a.y_label.font_size=fonte
a.title.font_size=fonte
```

## 2 – Questão 2

```
R=10;
C=-400

//Para o sistema linear eletrico
// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=1/(R*C);
B=1/R;
C=1;
D=0;
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
// continuo no tempo
// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,h0);
```

# PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

## Lista D - Bruno Akira Oshiro (10771667)

```
// Plotando o resultados:
plot(t,y,'b');
legend(["elétrico"]);
b=gce();
b.font_size=3
xlabel("Sistema elétrico","Tempo t [s]","Integral da corrente [C]");
a=gca();
fonte=3
a.font_size=fonte
a.x_label.font_size=fonte
a.y_label.font_size=fonte
a.title.font_size=fonte
```

### 3 – Questão 3

```
// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nível adicional desejado
Qei=1/2*sqrt(rho*g/(ho*R))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada

Ra=R
Rs=R
S1=S
S2=S

// Definir a condicao inicial:
h0_1=2; // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial
h0_2=6; // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial

// Definir o vetor t de instantes de tempo:
t=0:10:1000; // vetor de tempo. Observe que t(1) eh o instante inicial

//Para o sistema linear
// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=rho*g/2/Qei*[-1/(S1*Ra), 1/(S1*Ra);1/(S2*Ra), -1/S2*(1/Ra+1/Rs)];
B=[1/S;0];
C=[1, 0;0, 1];
D=[0;0];
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
// contínuo no tempo
// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);
// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,[h0_1;h0_2]);

// Plotando o resultados:
plot(t,y(1,:), 'r', t,y(2,:), 'b');
legend(["tanque 1","tanque 2"]);
b=gce();
b.font_size=3
xlabel("Alturas dos tanques em função de tempo","Tempo t [s]","Nível [m]");
a=gca();
fonte=3
a.font_size=fonte
a.x_label.font_size=fonte
a.y_label.font_size=fonte
a.title.font_size=fonte
```