UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA – DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Lista 4

Pedro Leonel Giannoni de Oliveira
Número USP: 10335569

São Paulo
2020

INTRODUÇÃO

Essa lista objetiva realizar a simulação numérica de sistemas lineares compostos por equações diferenciais (equações de estado) e equações algébricas (equações de saída).

EXEMPLO

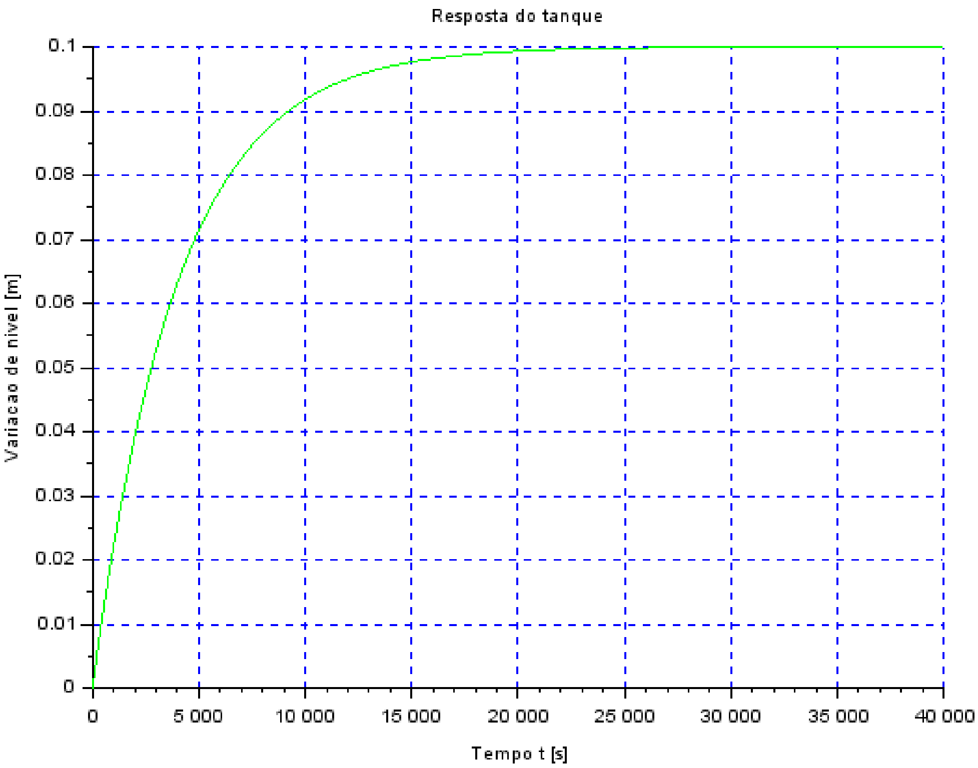
Foi implementado um programa para realizar a solução numérica do seguinte sistema linear:

$$\dot{x} = \underbrace{-\frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{R h_o}}}_{A}\,x + \underbrace{\frac{1}{S}}_{B}\,u \qquad \text{(equações diferenciais)}$$

$$y = \underbrace{+1}_{C}\,x + \underbrace{0}_{D}\,u \qquad \text{(equações algébricas)}$$

A curva expressa no gráfico 1 é o resultado da execução da simulação.

Gráfico 1 - Simulação numérica de sistema linear



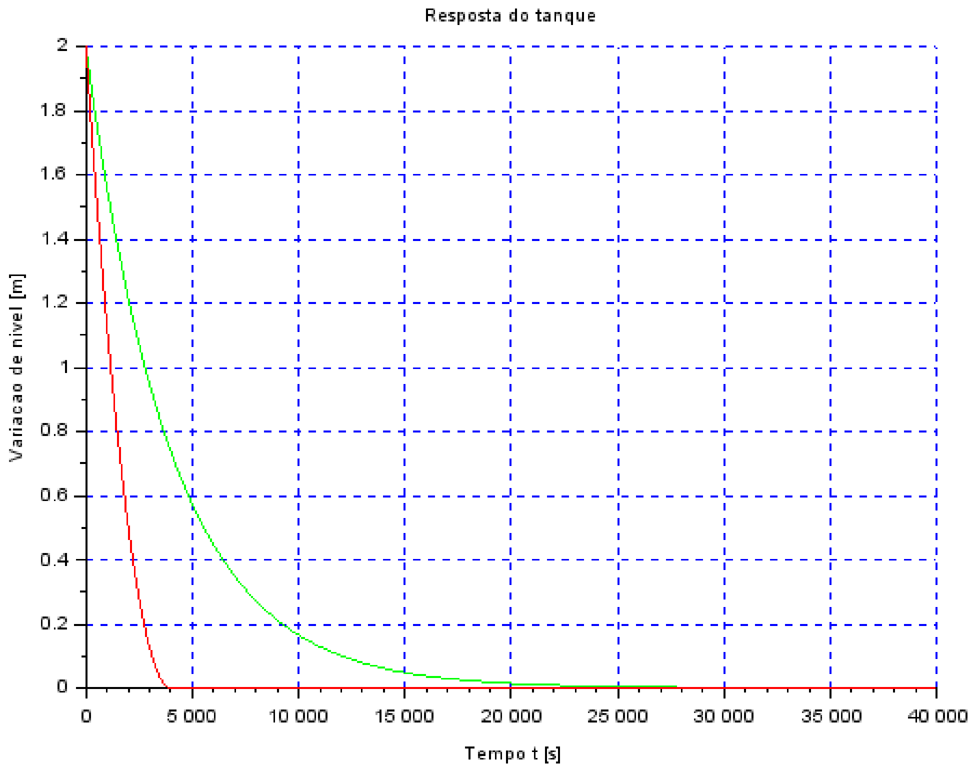
Código Scilab:

```
// Simulacao de sistema linear
// Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear all

// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada

// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B=1/S;
C=1;
D=0;
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
// continuo no tempo

// Definir a condicao inicial:
x0=0;    // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio

// Definir o vetor de instantes de tempo:
t=0:10:40000;

// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);

// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,x0);

// Plotando o resultado em verde:
plot2d(t,y,3)
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle("Resposta do tanque","Tempo t [s]","Variacao de nivel [m]");

// Colocando uma grade azul no grafico:
xgrid(2)
```

EXERCÍCIO 1

Foi possível comparar as simulações não-lineares e as lineares a partir de algumas alterações no código do exemplo anterior usando as seguintes condições iniciais: nível inicial do tanque = 2m e vazão de entrada nula. A diferença entre o comportamento das duas curvas é causada pela linearização realizada, já que simplificações foram assumidas que acabaram não retratando com precisão o comportamento real do sistema.

Gráfico 2 - Modelo linear x Modelo não linear



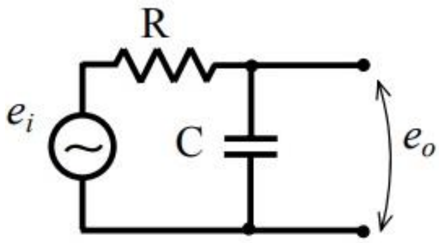
Código Scilab:

```
// Simulacao de sistema linear
// Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear all

// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1e-2)*(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada

// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B=1/S;
C=1;
D=0;
tanquelin=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
 // continuo no tempo

 // Definir a funcao que implementa a equacao nao linear
function [hdot]=tanque(t, h, Qe)
hdot=(-sqrt(rho*g*h/R)+Qe(t))/S
endfunction

// Definir a funcao que implementa a entrada Qe:
function [u]=entrada(t)
u=Qei;
endfunction

// Definir a condicao inicial:
x0=2; // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio

// Definir o vetor de instantes de tempo:
t=0:10:40000;

// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);

// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanquelin,x0);

// Plotando o resultado em verde:
plot2d(t,y,3)

// Definindo uma variavel do tipo 'lista' p/ nomear o titulo e os eixos:
T=list("Resposta do tanque","Tempo t [s]","Variacao de nivel [m]");

// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle(T(1),T(2),T(3));

// Colocando uma grade azul no grafico:
xgrid(2)

// Comando que realiza a simulacao numérica nao linear:
h=ode(h0,t(1),t,list(tanque,entrada));  // h eh o nivel do reservatorio [m]

// Plotando o resultado em vermelho:
plot2d(t,h,5)
```

EXERCÍCIO 2

Foi proposto a definição do modelo matemático do circuito elétrico mostrado abaixo e sua comparação com o modelo linear do sistema de um reservatório. Foram feitas simulações e comparações com os resultados do exercício 1 após a determinação do modelo.

Figura 1 Circuito elétrico



As leis de Kirchoff foram usadas para determinação do modelo matemático:

$$e_i = R.i + e_0$$

A capacitância é definida como:

$$e_0 = q/C$$

Dado que i é a divisão de carga por tempo, concluimos que:

$$e_i = R.\dot{q} + \frac{q}{C}$$

$$\dot{q} = -\frac{q}{RC} + \frac{e_i}{R}$$

Dada a equação linear do modelo com reservatório dada por:

$$\dot{x} = \underbrace{-\frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{Rh_o}}}_{A}x + \underbrace{\frac{1}{S}}_{B}u$$

É possível notar que ambas as equações podem ser escritas no modo geral $\dot{x} = Ax + B$.

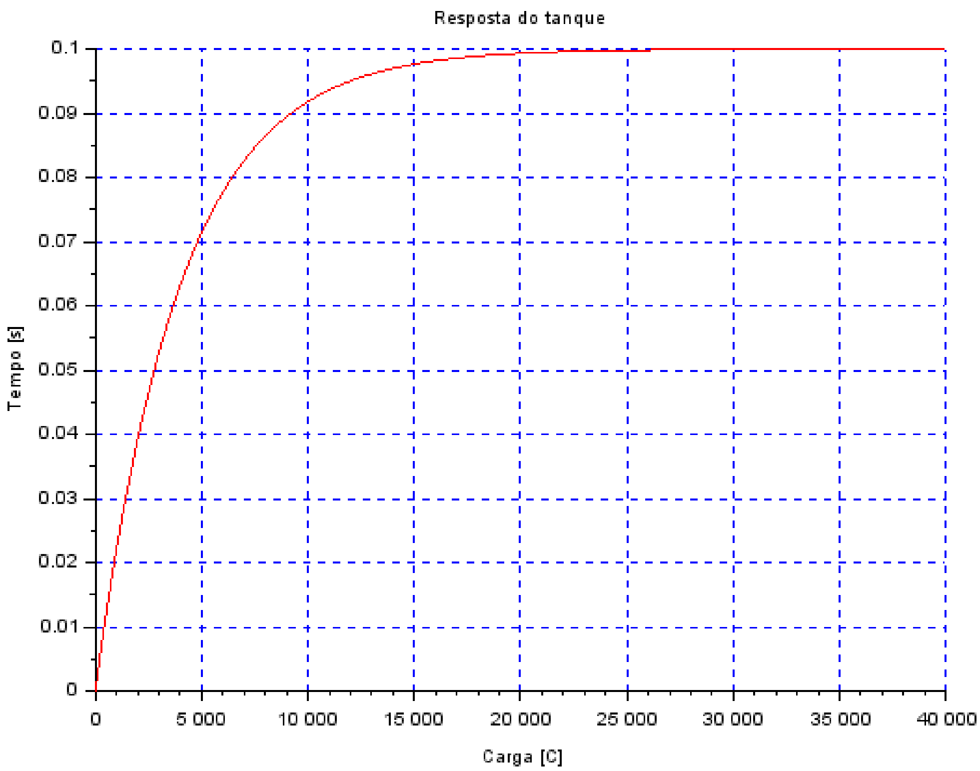
Dessa forma, o modelo matemático apresenta semelhanças e percebe-se que há relações entre as variáveis, que são definidas da seguinte forma:

- Carga do circuito (q) com a posição do nível do reservatório (x);
- Resistencia (R) com a área da secção transversal (S);
- O inverso da capacitância (C) com $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{R h_o}}$;
- A tensão de alimentação (e_i) com a vazão de entrada (u).

Seguindo as analogias definidas e simulando o sistema chegamos no resultado mostrado no gráfico 3, em vermelho, relacionando a carga do circuito em relação a tempo.

A resposta do sistema é a mesma, já que há uma igualdade na solução da equação diferencial.

Gráfico 3 - Resposta do Circuito elétrico



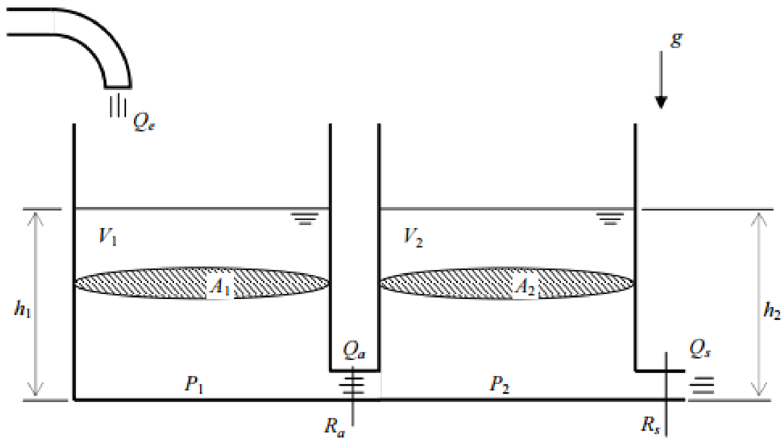
Código Scilab:

```
// Simulacao de sistema linear
// Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear all

// Definir parametros:
S=10; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/(R*ho))*hi; // [m^3/s] vazao na entrada

// Definir o sistema linear usando o comando syslin:
A=(-1/(2*S))*sqrt(rho*g/(R*ho));
B=1/S;
C=1;
D=0;
tanque=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
// continuo no tempo

// Definir a condicao inicial:
x0=0;    // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio

// Definir o vetor de instantes de tempo:
t=0:10:40000;

// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);

// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanque,x0);

// Plotando o resultado em preto:
plot2d(t,y,1)

// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle("Resposta do tanque","Carga [C]","Tempo [s]");

// Colocando uma grade azul no grafico:
xgrid(2)
```

Exercício para casa 1:

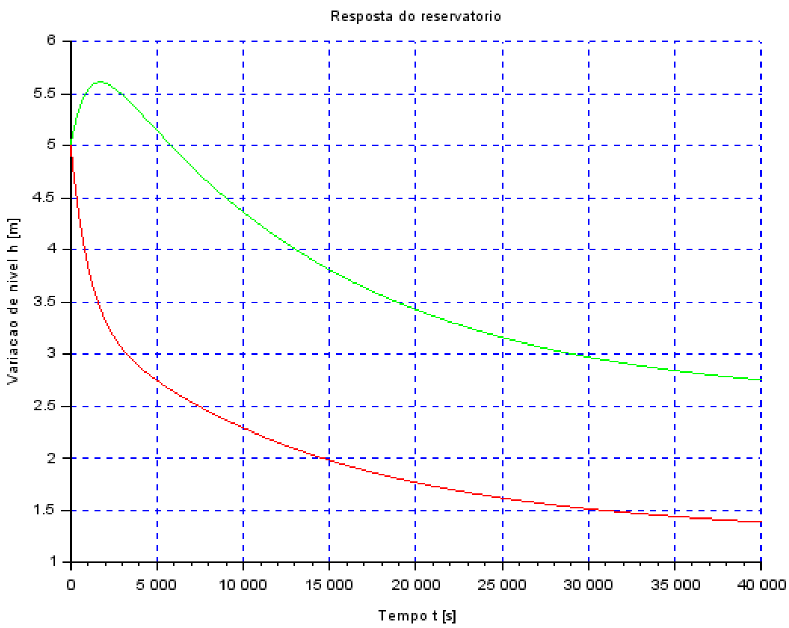
Foi proposto a simulação do sistema com dois reservatórios a seguir, mostrado na figura 2 utilizando o modelo linear visto no exemplo e no exercício 1.

Figura 2 Sistema de dois reservatórios



Seguindo as seguintes condições iniciais: h1 = 5m e h2 = 5m, e simulando, obtemos o gráfico 4, onde a linha verde representa a altura do reservatório 1 e a linha vermelha representa a altura do reservatório 2.

Gráfico 4 - Respostas dos dois reservatórios da figura 2

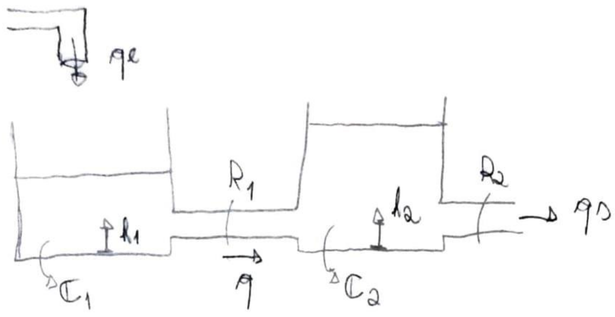


Código Scilab:

```
// Simulacao de sistema linear
// Eh sempre melhor apagar as variaveis anteriores
clear all

// Definir parametros:
S1=20; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio 1
S2=20; // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio 2
rho=1000; // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10; // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
Ra=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
Rb=2*10^8; // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2; // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1; // [m] nivel adicional desejado
Qei=(1/2)*sqrt(rho*g/((h0-hi)*Ra)); // [m^3/s] vazao na entrada

// Definir a condicao inicial:
x0=[5;5];                    // [m] desvio inicial do nivel em relação ao equilibrio
h10=(Ra+Rb)*Qei^2/(rho*g);      // [m] nivel do reservatorio 1 na condicao inicial
h20=Rb*Qei^2/(rho*g);          // [m] nivel do reservatorio 2 na condicao inicial

// Definir o sistema linear para o sistema usando o comando syslin:
A=[(-1/(2*S1))*sqrt(rho*g/(Ra*h10)) (1/(2*S1))*sqrt(rho*g/(Ra*h20));
   (1/(2*S2))*sqrt(rho*g/(Ra*h10)) (-1/(2*S2))*sqrt(rho*g*(Ra+Rb)/(Ra*Rb*h20))];
B=[1/S;0];
C=[1 0;0 1];
D=[0;0];
tanquelin=syslin('c',A,B,C,D); // o parametro 'c' indica que o sistema eh
 // continuo no tempo

// Definir o vetor de instantes de tempo:
t=0:10:40000;

// Definir o vetor de entradas:
u=Qei*ones(t);

// Simulando o sistema usando o comando csim:
[y,x]=csim(u,t,tanquelin,x0);

// Plotando o resultado em verde do reservatório 1:
plot2d(t,y(1,:),3)

// Plotando o resultado em vermelho reservatório 2:
plot2d(t,y(2,:),5)

// Definindo uma variavel do tipo 'lista' p/ nomear o titulo e os eixos:
T=list("Resposta do reservatorio","Tempo t [s]","Variacao de nivel h [m]");

// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle(T(1),T(2),T(3));

// Colocando uma grade azul no grafico:
xgrid(2)
```

Exercício para casa 2:

Figura 3 - Resolução do exercício para casa 2



•) Tem-se que:

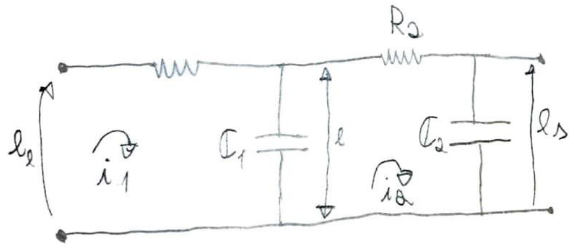
$$C_1 \cdot \frac{dh_1}{dt} = q_e - q \quad (1)$$

$$C_2 \cdot \frac{dh_2}{dt} = q - q_s \quad (2)$$

$$q = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \quad (3)$$

$$q_s = \frac{h_2}{R_2} \quad (4)$$

•) Analogia elétrica:



Dessa forma:

$$\begin{cases} R_1 \cdot i_1 = e_e - e \\ R_2 \cdot i_2 = e - e_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow e = \int \frac{(i_1 - i_2)}{C_1} \, dt$$

$$\Rightarrow e_s = \int \frac{i_2}{C_2} \, dt$$

•) Utilizando "q" (carga) nas expressões:

$$R_1 \cdot \frac{dq_1}{dt} = e_e - e \quad (1')$$

$$R_2 \cdot \frac{dq_2}{dt} = e - e_s \quad (2')$$

$$e = \frac{q_1 - q}{C_1} \quad (3')$$

$$e_s = \frac{q_2}{C_2} \quad (4')$$