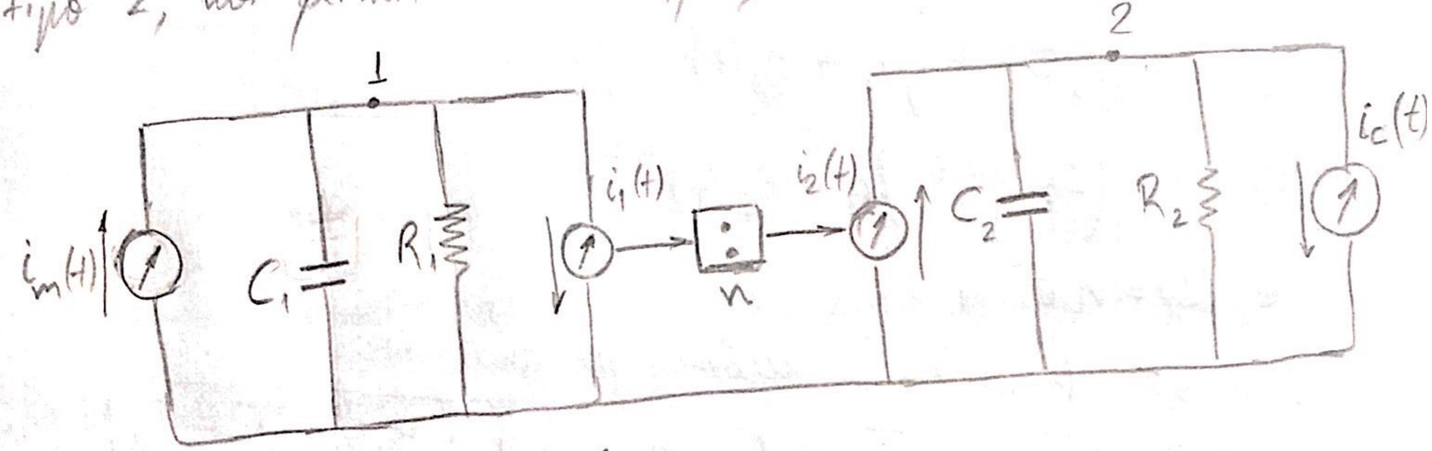
Lucas Souza Vieira   Nº USP: 10772863

PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exercícios aula 15/09

1 a) O circuito do enunciado, construído por analogia do tipo 2, nos permite obter as equações do sistema mecânico:



← Circuito elétrico análogo.

Obtendo as equações do circuito pelo método prático:

Nó 1: $V_1\left(C_1 D + \frac{1}{R_1}\right) = i_m - i_1$

Nó 2: $V_2\left(C_2 D + \frac{1}{R_2}\right) = i_2 - i_c$

Transformador: $i_2 = n i_1$

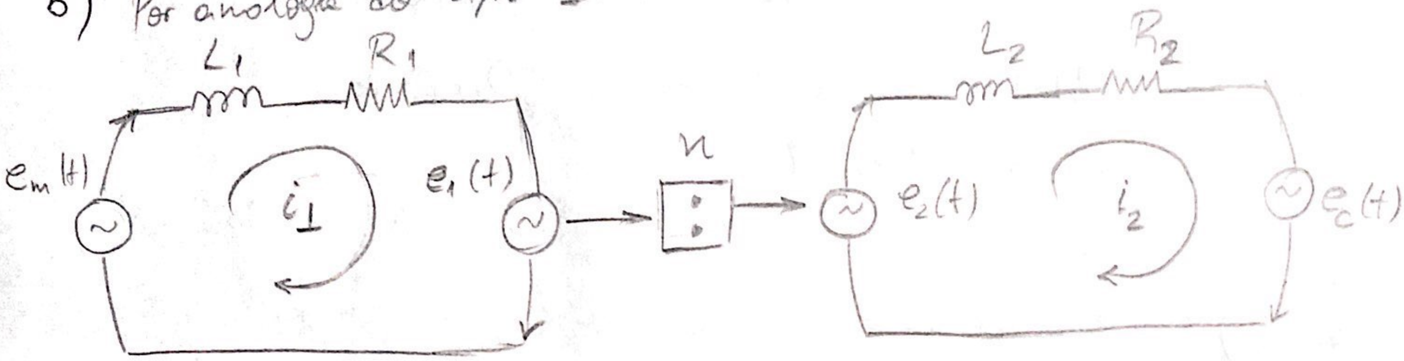
Equações análogas para o sistema mecânico:

Nó 1: $\omega_1(J_1 D + B_1) = T_m - T_1 \Rightarrow \boxed{J_1\ddot{\theta}_1 + B_1\dot{\theta}_1 = T_m - T_1}$

Nó 2: $\omega_2(J_2 D + B_2) = T_2 - T_c \Rightarrow \boxed{J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2 = T_2 - T_c}$

Transformador: $\boxed{T_2 = n T_1} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1}{n}}$

b) Por analogia do tipo 1:



Equações do circuito elétrico:

$$e_m(t) = (L_1 D + R_1)\, i_1 + e_1(t)$$

$$e_2(t) = (L_2 D + R_2)\, i_2 + e_c(t)$$

$$e_2(t) = n\, e_1(t)$$

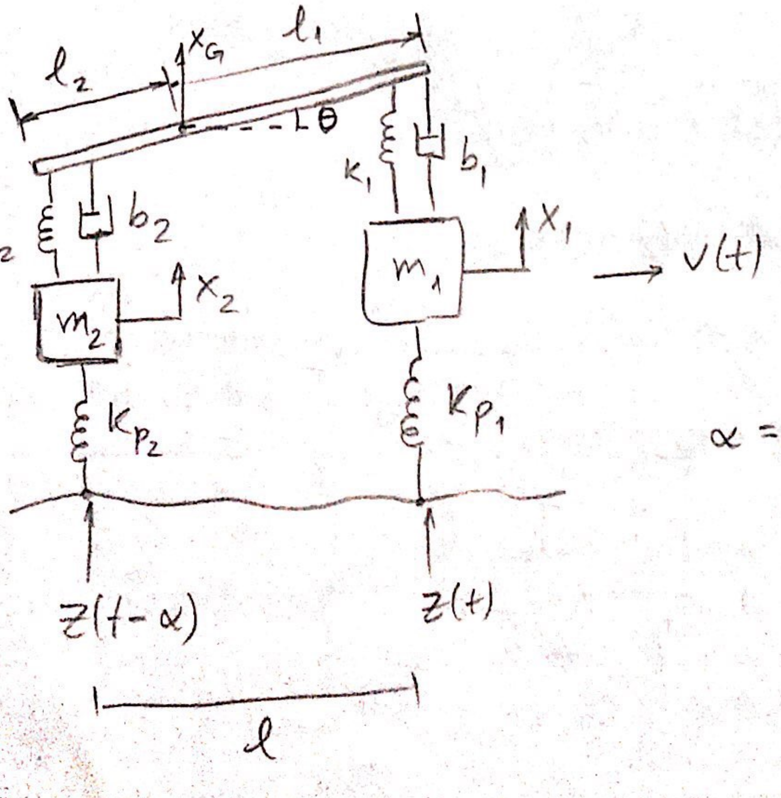
Equações do sistema mecânico por analogia:

$$(J_1 D + B_1)\, w_1 = T_m - T_1 \Rightarrow \boxed{J_1 \ddot{\theta}_1 + B_1 \dot{\theta}_1 = T_m - T_1}$$

$$(J_2 D + B_2)\, w_2 = T_2 - T_c \Rightarrow \boxed{J_2 \ddot{\theta}_2 + B_2 \dot{\theta}_2 = T_2 - T_c}$$

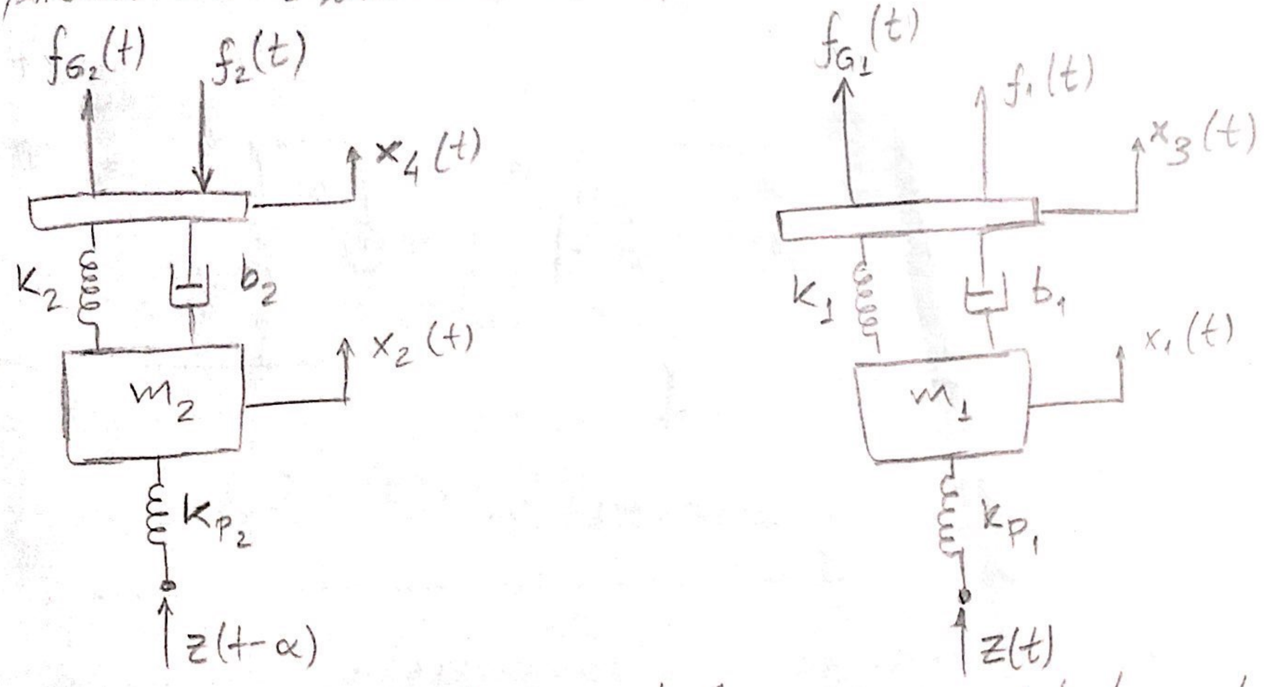
$$\boxed{T_2 = n\, T_1} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1}{n}}$$

(2)



$$\alpha = \frac{l}{V}$$

Separando em 2 sistemas de 1/4 de carro:



Tomando o sistema linearizado (pequenas amplitudes e deslocamentos), sabemos que:

$$\begin{cases} f_2(t) = l_2(K_2\theta + b_2\dot{\theta}) \\ f_1(t) = l_1(K_1\theta + b_1\dot{\theta}) \end{cases} \text{Forças devido ao mov. de arfagem}$$

$$\begin{cases} f_{G_2}(t) = K_2(X_G - X_2) + b_2(\dot{X}_G - \dot{X}_2) \\ f_{G_1}(t) = K_1(X_G - X_1) + b_1(\dot{X}_G - \dot{X}_1) \end{cases} \text{Forças devido ao mov. de "bounce"}$$

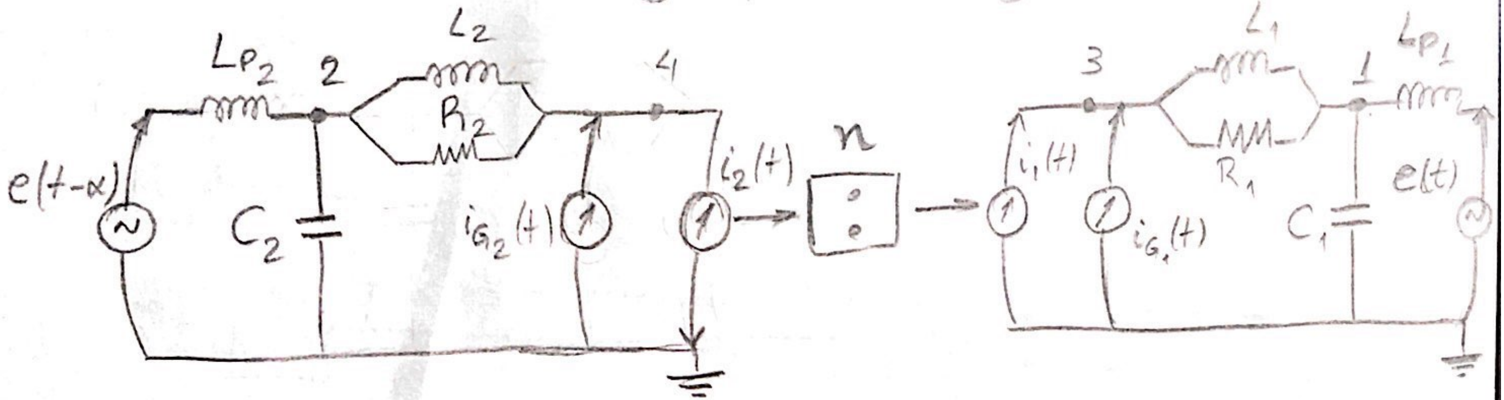
Considerando transformador ideal que introduz o movimento de arfagem, então as potências devidas à arfagem devem ser iguais para cada extremidade superior dos 1/4 de carro, isto é:

$$P_1 = P_2$$

$$f_1 V_{1,arf} = f_2 V_{2,arf}$$

$$f_1 l_1 \dot{\theta} = f_2 l_2 \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{n = \frac{f_2}{f_1} = \frac{l_1}{l_2}}$$

O circuito elétrico análogo fica (analogia tipo 2):



Equações do circuito elétrico:

Nó 1:

$$V_1\left(C_1D+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{L_1D}+\frac{1}{L_{1p}D}\right)-e(t)\cdot\frac{1}{L_{1p}D}-V_3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{L_1D}\right)=0$$

Nó 2:

$$V_2\left(C_2D+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{L_2D}+\frac{1}{L_{2p}D}\right)-e(t-\alpha)\cdot\frac{1}{L_{2p}D}-V_4\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{L_2D}\right)=0$$

Nó 3:

$$V_3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{L_1D}\right)=i_1(t)+i_{G_1}(t)$$

Nó 4:

$$V_4\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{L_2D}\right)=-i_2(t)+i_{G_2}(t)$$

Substituindo as equações do nó 3 em 1 e do 4 em 2:

$$\begin{cases} V_1\left(C_1D+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{L_1D}+\frac{1}{L_{1p}D}\right)=\frac{e(t)}{L_{1p}D}+i_1(t)+i_{G_1}(t) \\ V_2\left(C_2D+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{L_2D}+\frac{1}{L_{2p}D}\right)=\frac{e(t-\alpha)}{L_{2p}D}+i_{G_2}(t)-i_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1\left(m_1 D + b_1 + \dfrac{k_1}{D} + \dfrac{k_{1p}}{D}\right) = \dfrac{\dot{z}(t)\cdot k_{1p}}{D} + f_1(t) + f_{G_1}(t) \\ v_2\left(m_2 D + b_2 + \dfrac{k_2}{D} + \dfrac{k_{2p}}{D}\right) = \dfrac{\dot{z}(t-\alpha)\, k_{2p}}{D} - f_2(t) + f_{G_2}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_{1p})x_1 = k_{1p} z(t) + f_1(t) + f_{G_1}(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + (k_2 + k_{2p})x_2 = k_{2p} z(t-\alpha) - f_2(t) + f_{G_2}(t) \end{cases}}$$

Supondo que conhecemos os esforços exercidos pelo chassi, determinamos ainda x_G e θ de:

$$\boxed{\begin{cases} f_1 + f_{G_1} - f_2 + f_{G_2} = M\ddot{x}_G \\ (f_1 + f_{G_1})\,l_1 + (f_{G_2} - f_2)\,l_2 = J_G\,\ddot{\theta} \end{cases}}$$

3 Demonstração da equação diferencial em ω_2 da caixa de transmissão vista em aula:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 + B_1\omega_1 + T_1 = T_m & (1) \\ J_2\dot{\omega}_2 + B_2\omega_2 + T_c = T_2 & (2) \end{cases}$$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow T_1\omega_1 = T_2\omega_2 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1\omega_1}{\omega_2} = n\,T_1 \quad (3)$$

De (3) em (2): $J_2\dot{\omega}_2 + B_2\omega_2 + T_c = n\,T_1$ (4)

De (1): $T_1 = T_m - J_1\dot{\omega}_1 - B_1\omega_1$ (5)

De (5) em (4):

$$J_2\dot{\omega}_2 + B_2\omega_2 + T_c + n(J_1\dot{\omega}_1 + B_1\omega_1) = nT_m$$

Mas $\omega_1 = n\omega_2 \Leftrightarrow \dot{\omega}_1 = n\dot{\omega}_2$, então:

$$J_2\dot{\omega}_2 + B_2\omega_2 + T_c + n(J_1 n\dot{\omega}_2 + B_1 n\omega_2) = nT_m$$

$$\underbrace{(J_2 + n^2 J_1)}_{J_{eq\,2}}\dot{\omega}_2 + \underbrace{(B_2 + n^2 B_1)}_{B_{eq\,2}}\omega_2 + T_c = nT_m$$

$$\boxed{J_{eq_2}\dot{\omega}_2 + B_{eq_2}\omega_2 + T_c = nT_m}$$

onde
$$\begin{cases} J_{eq_2} = J_2 + n^2 J_1 \\ B_{eq_2} = B_2 + n^2 B_1 \end{cases}$$