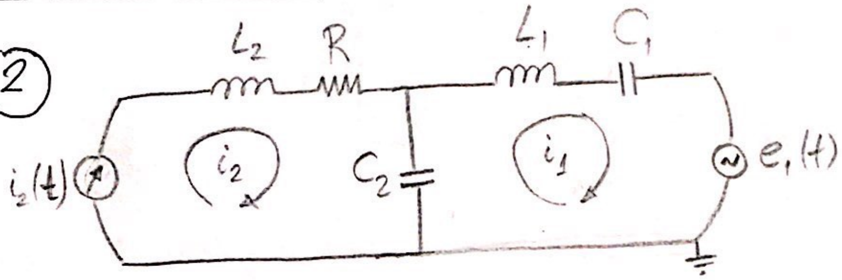
Lucas Souza Vieira   Nº USP: 10772863

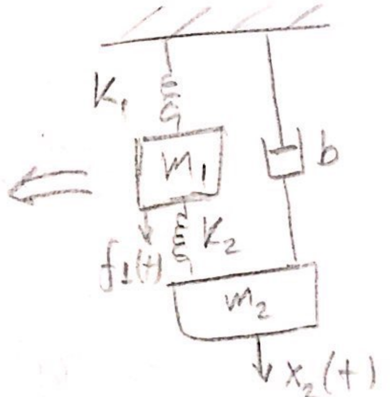
Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exercícios da aula 08/09/2020

Exs. do slide da aula

(2)





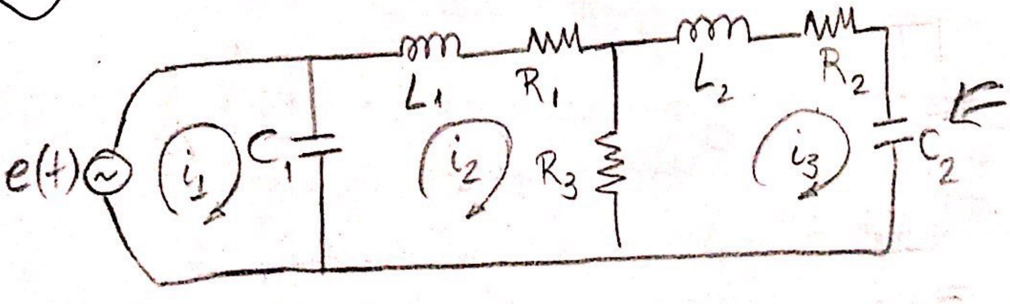
$$e_1(t) = \left(L_1 D + \frac{1}{C_1 D}\right) i_1 + \frac{1}{C_2 D}(i_1 - i_2)$$

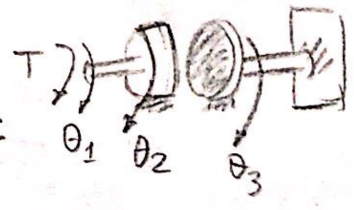
Como $i_2(t)$ é conhecida, temos apenas 1 grau de liberdade em $i_1(t)$. A equação para o sistema mecânico fica:

$$\left(m_1 D + \frac{K_1}{D}\right) v_1 + \frac{K_2}{D}(v_1 - v_2) = f_1(t)$$

$$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 + (K_1 + K_2) x_1 = f_1(t) + K_2 x_2}$$

(3) Sistema rotativo: $\vec{f} \to \vec{T} \to V$; $\vec{v} \to \vec{\omega} \to i$





Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} e(t) = \dfrac{1}{C_1 D}(i_1 - i_2) \\[2ex] \left(L_1 D + R_1\right) i_2 + \dfrac{1}{C_1 D}(i_2 - i_1) + R_3 (i_2 - i_3) = 0 \\[2ex] \left(L_2 D + R_2 + \dfrac{1}{C_2 D}\right) i_3 + R_3 (i_3 - i_2) = 0 \end{cases}$$

Obtendo as equações do sistema mecânico por analogia tipo 1:

$$T(t) = \frac{K_1}{D}(\omega_1 - \omega_2) \Rightarrow \boxed{T(t) = K_1 (\theta_1 - \theta_2)}$$

$$(J_1 D + B_1)\omega_2 + \frac{K_1}{D}(\omega_2 - \omega_1) + B_3(\omega_2 - \omega_3) = 0$$

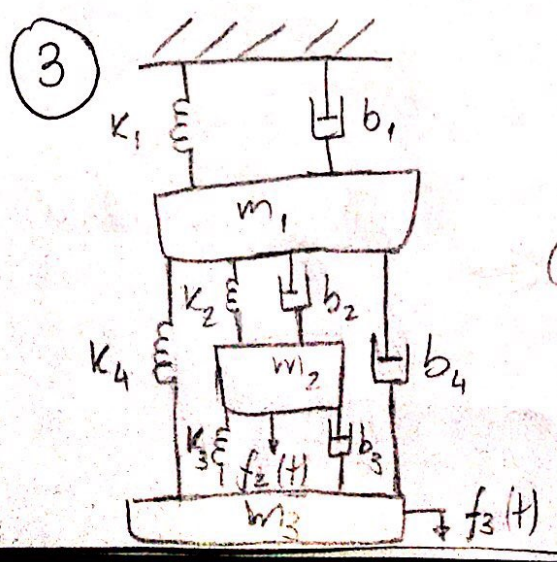
$$\boxed{J_1 \ddot{\theta}_2 + (B_1 + B_3)\dot{\theta}_2 + K_1 \theta_2 = K_1 \theta_1 + B_3 \dot{\theta}_3}$$

$$\left(J_2 D + B_2 + \frac{K_2}{D}\right)\omega_3 + B_3(\omega_3 - \omega_2) = 0$$

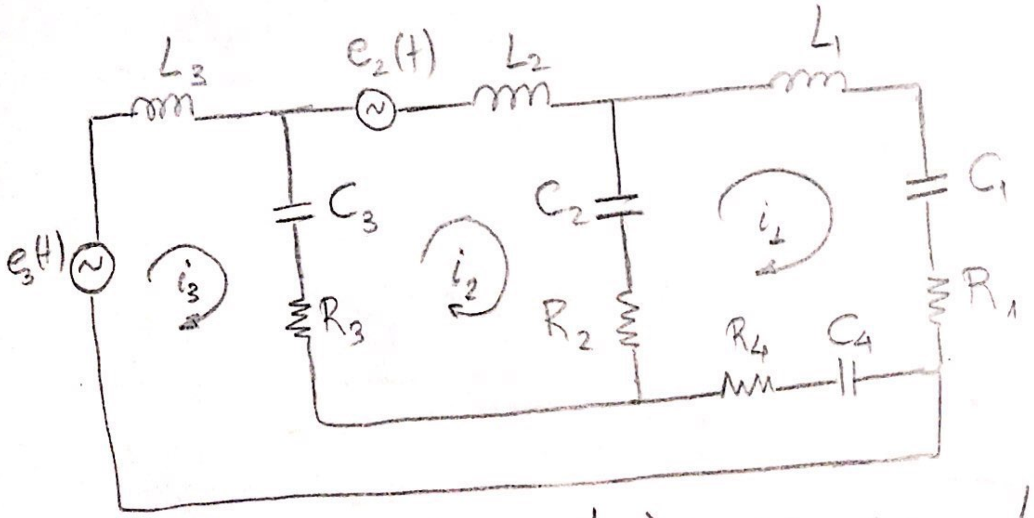
$$\boxed{J_2 \ddot{\theta}_3 + (B_2 + B_3)\dot{\theta}_3 + K_2 \theta_3 = B_3 \dot{\theta}_2}$$

Exs. da lista adicional

3



Usando a analogia tipo 1, construímos o circuito elétrico análogo:



$$\begin{cases} e_3(t) = L_3 D i_3 + \left(R_3 + \frac{1}{C_3 D}\right)(i_3 - i_2) + \left(R_4 + \frac{1}{C_4 D}\right)(i_3 - i_1) \\ e_2(t) = L_2 D i_2 + \left(R_2 + \frac{1}{C_2 D}\right)(i_2 - i_1) + \left(R_3 + \frac{1}{C_3 D}\right)(i_2 - i_3) \\ \left(L_1 D + R_1 + \frac{1}{C_1 D}\right) i_1 + \left(R_2 + \frac{1}{C_2 D}\right)(i_1 - i_2) + \left(R_4 + \frac{1}{C_4 D}\right)(i_1 - i_3) = 0 \end{cases}$$

Para o sistema mecânico, por analogia:

$$m_3 D v_3 + \left(b_3 + \frac{k_3}{D}\right)(v_3 - v_2) + \left(b_4 + \frac{k_4}{D}\right)(v_3 - v_1) = f_3(t)$$

$$\boxed{m_3 \ddot{x}_3 + (b_3 + b_4)\dot{x}_3 + (k_3 + k_4)x_3 = f_3(t) + b_3 \dot{x}_2 + k_3 x_2 + b_4 \dot{x}_1 + k_4 x_1}$$

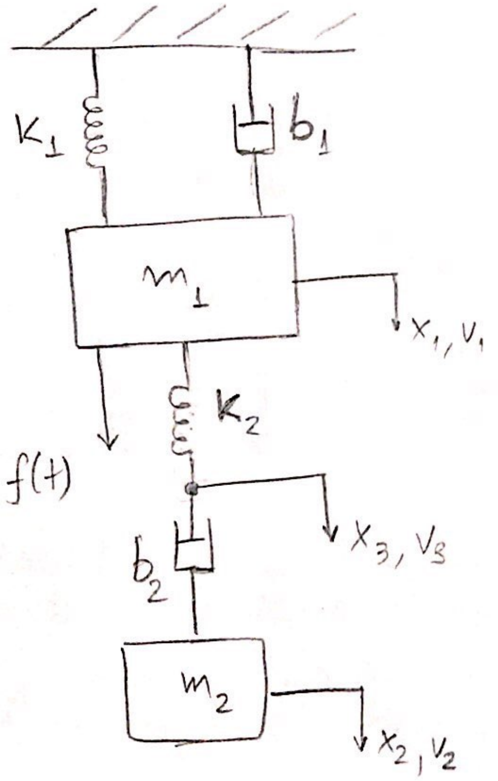
$$m_2 D v_2 + \left(b_2 + \frac{k_2}{D}\right)(v_2 - v_1) + \left(b_3 + \frac{k_3}{D}\right)(v_2 - v_3) = f_2(t)$$

$$\boxed{m_2 \ddot{x}_2 + (b_2 + b_3)\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2(t) + b_2 \dot{x}_1 + b_3 \dot{x}_3 + k_2 x_1 + k_3 x_3}$$

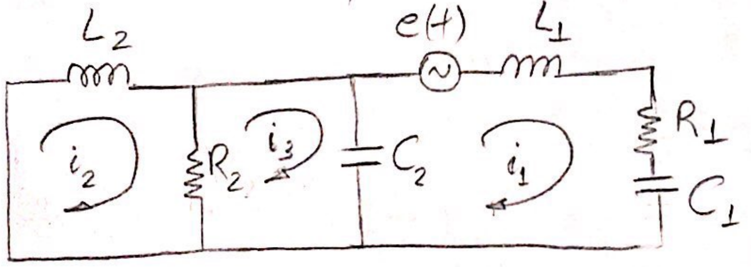
$$\left(m_1 D + b_1 + \frac{k_1}{D}\right) v_1 + \left(b_2 + \frac{k_2}{D}\right)(v_1 - v_2) + \left(b_4 + \frac{k_4}{D}\right)(v_1 - v_3) = 0$$

$$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 + (b_1 + b_2 + b_4)\dot{x}_1 + (k_1 + k_2 + k_4)x_1 = b_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 + b_4 \dot{x}_3 + k_4 x_3}$$

6



Circuito elétrico equivalente



$$\begin{cases} \left(L_1 D + R_1 + \dfrac{1}{C_1 D}\right) i_1 + \dfrac{1}{C_2 D}(i_1 - i_3) = e(t) \\[2ex] L_2 D i_2 + R_2 (i_2 - i_3) = 0 \\[2ex] R_2 (i_3 - i_2) + \dfrac{1}{C_2 D}(i_3 - i_1) = 0 \end{cases}$$

Equações do sistema mecânico:

$$\left(m_1 D + b_1 + \frac{K_1}{D}\right) v_1 + \frac{K_2}{D}(v_1 - v_3) = f(t)$$

$$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + (K_1 + K_2)\dot{x}_1 = f(t) + K_2 x_3}$$

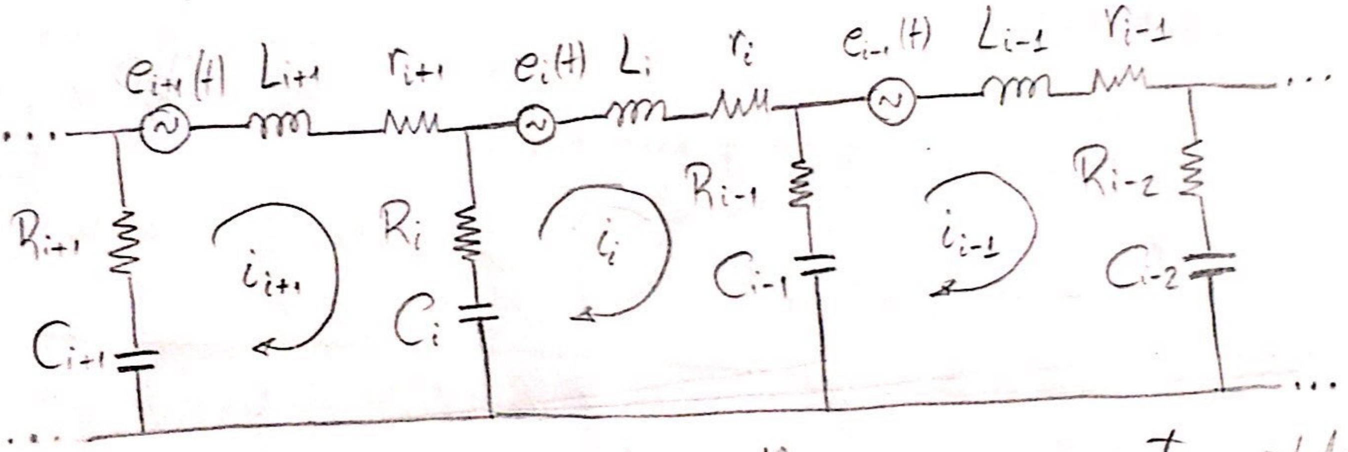
$$m_2 D v_2 + b_2(v_2 - v_3) = 0$$

$$\boxed{m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 = b_2 \dot{x}_3}$$

$$b_2(v_3 - v_2) + \frac{k_2}{D}(v_3 - v_1) = 0$$

$$\boxed{b_2 \dot{x}_3 + k_2 x_3 = b_2 \dot{x}_2 + k_2 x_1}$$

7 Usando a analogia tipo 1, representamos o circuito elétrico equivalente para os vagões $i-1$, i e $i+1$:



Os resistores r_i referem-se à resistência ao movimento modelada com atrito viscoso linear, de constante de amortecimento b_i. Já os resistores R_i referem-se aos amortecedores de constante d_i dos acoplamentos.

A equação do circuito elétrico para o i-ésimo vagão:

$$e_i(t) = (L_i D + r_i)\, i_i + \left(R_{i-1} + \frac{1}{C_{i-1} D}\right)(i_i - i_{i-1}) + \left(R_i + \frac{1}{C_i D}\right)(i_i - i_{i+1})$$

$$e_i(t) = \left(L_i D + R_{i-1} + R_i + r_i + \frac{1}{C_{i-1} D} + \frac{1}{C_i D}\right) i_i - \left(R_{i-1} + \frac{1}{C_{i-1} D}\right) i_{i-1} - \left(R_i + \frac{1}{C_i D}\right) i_{i+1}$$

Sabendo que a força aplicada sobre cada vagão é

$$u_i'(t) = u_i - m_i g \operatorname{sen}\theta_i$$

Usamos a analogia para obter as equações no sistema mecânico:

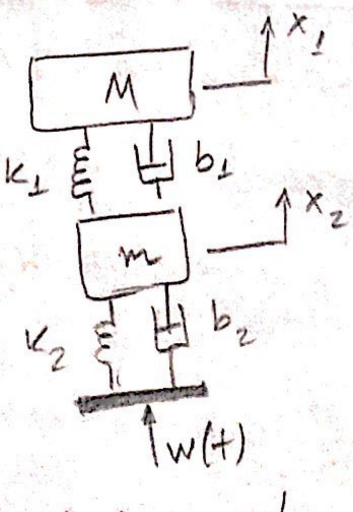
$$\left(m_i D + d_{i-1} + d_i + b_i + \frac{k_{i-1}}{D} + \frac{k_i}{D}\right)v_i - \left(d_{i-1} + \frac{k_{i-1}}{D}\right)v_{i-1} +$$

$$- \left(d_i + \frac{k_i}{D}\right)v_{i+1} = u_i - m_i g \operatorname{sen}\theta_i$$

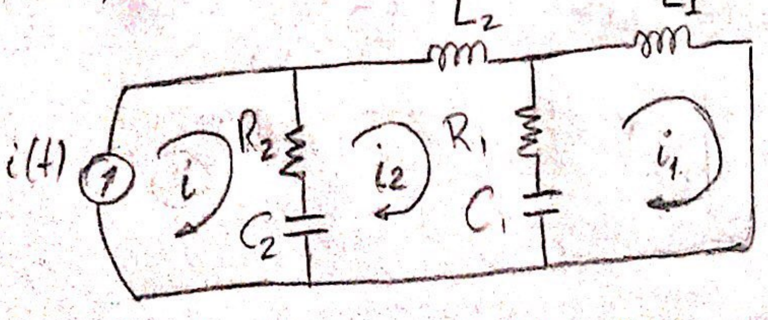
Portanto:

$$\boxed{m_i \ddot{x}_i + (d_{i-1} + d_i + b_i)\dot{x}_i + (k_{i-1} + k_i)x_i = d_{i-1}\dot{x}_{i-1} + k_{i-1}x_{i-1} + d_i \dot{x}_{i+1} + k_i x_{i+1} + u_i - m_i g \operatorname{sen}\theta_i}$$

8



a) w(t) → deslocamento



$$\begin{cases} L_1 D i_1 + \left(R_1 + \frac{1}{C_1 D}\right)(i_1 - i_2) = 0 \\ L_2 D i_2 + \left(R_1 + \frac{1}{C_1 D}\right)(i_2 - i_1) + \left(R_2 + \frac{1}{C_2 D}\right)(i_2 - i) = 0 \end{cases}$$

Equações para o modelo mecânico:

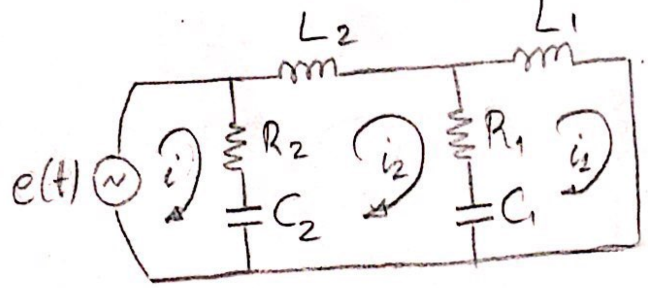
$$M D v_1 + \left(b_1 + \frac{K_1}{D}\right)(v_1 - v_2) = 0$$

$$\boxed{M \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x = b_1 \dot{x}_2 + k_1 x_2}$$

$$m D v_2 + \left(b_1 + \frac{K_1}{D}\right)(v_2 - v_1) + \left(b_2 + \frac{K_2}{D}\right)(v_2 - \dot{w}(t)) = 0$$

$$\boxed{m \ddot{x}_2 + (b_1 + b_2)\dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 = b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + b_2 \dot{w}(t) + k_2 w(t)}$$

b) $w(t) \longrightarrow$ Força imposta pela via



$$\begin{cases} \left(R_2 + \frac{1}{C_2 D}\right)(i - i_2) = e(t) \\ L_2 D i_2 + \left(R_1 + \frac{1}{C_1 D}\right)(i_2 - i_1) + \underbrace{\left(R_2 + \frac{1}{C_2 D}\right)(i_2 - i)}_{-e(t)} = 0 \\ L_1 D i_1 + \left(R_1 + \frac{1}{C_1 D}\right)(i_1 - i_2) = 0 \end{cases}$$

Equações do modelo mecânico

$$M D v_1 + \left(b_1 + \frac{K_1}{D}\right)(v_1 - v_2) = 0$$

$$\boxed{M \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = b_1 \dot{x}_2 + k_1 x_2}$$

$$m_2 D v_2 + \left(b_1 + \frac{K_1}{D}\right)(v_2 - v_1) - W(t) = 0$$

$$\boxed{m_2 \ddot{x}_2 + b_1 \dot{x}_2 + K_1 x_2 = W(t) + b_1 \dot{x}_1 + K_1 x_1}$$

Em todos os exercícios, adotando apenas um novo tipo de analogia, obtivemos as mesmas equações diferenciais que anteriormente determinamos por Lagrange e analogia tipo 2.