Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Lista C

Professor: Décio Crisol e Agenor Fleury

Aluno: Ives Caero Vieira NUSP 10355551

São Paulo

2020

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A lista C consiste em simular numericamente um sistema de dois reservatórios usando algoritmos para resolução de equações diferenciais já disponíveis no software de simulação, isto é, sem a necessidade de se introduzir manualmente um método numérico para a obtenção da solução. Posteriormente, há a etapa de linearização do modelo de dois reservatórios.

2 EXERCÍCIO I: RESOLUÇÃO DE ODES DE DOIS RESERVATÓRIOS

Utilizando os comandos disponíveis no Matlab para resolução de ODEs, em especial o ode45, pode-se obter a solução da dinâmica dos dois reservatórios, com parâmetros iguais excetuando-se a altura inicial, que no primeiro reservatório é 10m e no segundo, 5m. O intervalo da simulação foi de 20000s e o passo de integração de 0.1s. Com isso, obteve-se a figura abaixo.

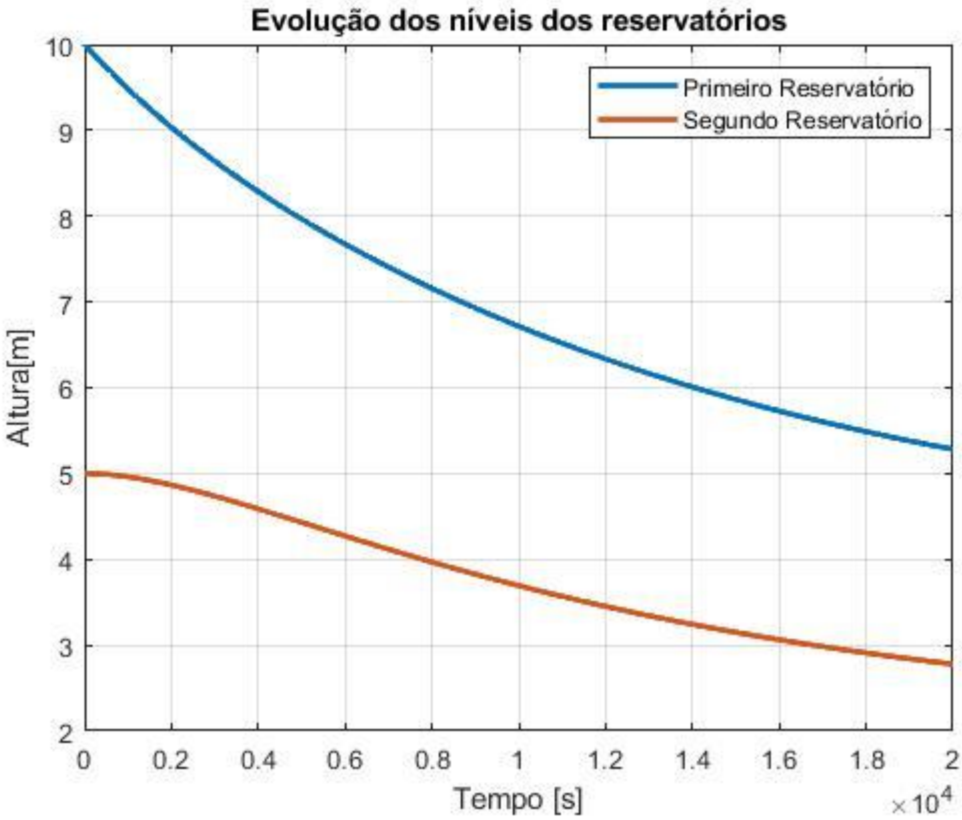

Figura 1: Evolução dos níveis dos dois reservatórios

3 EXERCICIO II: LINEARIZAÇÃO

Neste exercício, busca-se linearizar o seguinte sistema de equações, utilizado para a modelagem de dois reservatórios:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \left[Q_e - \sqrt{\dfrac{\rho g}{R_a}(h_1 - h_2)} \right] \dfrac{1}{S_1} \\ \dot{h}_2 = \left[\sqrt{\dfrac{\rho g}{R_a}(h_1 - h_2)} - \sqrt{\dfrac{\rho g}{R_s} h_2} \right] \dfrac{1}{S_2} \end{cases}$$

Para isso, é necessário aplicar a expansão em série de Taylor, em torno do ponto de equilíbrio do sistema, e posteriormente desprezar os termos de ordem superior a 1.

Devemos ter então duas funções da forma:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = f(Q_e, h_1, h_2) = f(Q_{eo}, h_{1o}, h_{2o}) + \dfrac{\partial f(Q_e, h_1, h_2)}{\partial Q_e}(Q_e - Q_{eo}) + \dfrac{\partial f(Q_e, h_1, h_2)}{\partial h_1}(h_1 - h_{1o}) + \\ \qquad \dfrac{\partial f(Q_e, h_1, h_2)}{\partial h_2}(h_2 - h_{2o}) + T.O.S \quad (1) \\ \dot{h}_2 = g(Q_e, h_1, h_2) = g(Q_{eo}, h_{1o}, h_{2o}) + \dfrac{\partial g(Q_e, h_1, h_2)}{\partial Q_e}(Q_e - Q_{eo}) + \dfrac{\partial g(Q_e, h_1, h_2)}{\partial h_1}(h_1 - h_{1o}) + \\ \qquad \dfrac{\partial g(Q_e, h_1, h_2)}{\partial h_2}(h_2 - h_{2o}) + T.O.S \quad (2) \end{cases}$$

Calculando as derivadas parciais, ignorando os termos de ordem superior (T.O.S), e aplicando a hipótese de que $S_1 = S_2, R_1 = R_2$, temos:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \dfrac{1}{S}(Q_e - Q_{eo}) - \dfrac{\rho g}{2RSQ_{eo}}(h_1 - h_{1o}) + \dfrac{\rho g}{2RSQ_{eo}}(h_2 - h_{2o}) \\ \dot{h}_2 = \dfrac{\rho g}{2RSQ_{eo}}(h_1 - h_{1o}) - \dfrac{\rho g}{RSQ_{eo}}(h_2 - h_{2o}) \end{cases}$$

Com isso, pode-se usar as seguintes transformações, conforme o enunciado:

- $y_1 = x_1 = h_1 - h_{1o}$
- $y_2 = x_2 = h_2 - h_{2o}$
- $u = Q_e - Q_{eo}$

E inserir outras duas, que são:

- $\dot{x}_1 = \dot{h}_1$
- $\dot{x}_2 = \dot{h}_2$

Assim, pode-se também formar as seguintes matrizes;

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, onde:$$

$$A_{12} = A_{21} = -A_{11} = \frac{A_{22}}{2} = \frac{\rho g}{2RSQ_{eo}};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, podemos enfim escrever o sistema linearizado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

4 CONCLUSÃO

Ao final da atividade, foi possível ter contato e familiarização com a estrutura dos métodos já disponíveis de resolução de EDOs, além de revisão das ferramentas de linearização de equações diferenciais por séries de Taylor.

5 APÊNPIDE I: CÓDIGO EM MATLAB DO EXERCÍCIO I

```
%PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos
%Aluno: Ives Caero Vieira NUSP: 10355551
%Lista C - Entrega até 10/09/2020
%% ================== Iniciando modelagem ================== %%
% ===== Parametros do problema ==== %
S = 10; %[m²]
rho = 1000; %[kg/m³]
g = 10; %[m/s²]
R = 2*10^8;%[Pa/(m³/s)²]
Qe = 0.010247;%[m³/s]
ho = 2;%[m]
hi = 0.1;%[m]
Qei = sqrt(rho*g*(ho+hi)/R);%[m³/s]
% ====== Condições iniciais ==== %
h0_1 = 10;
h0_2 = 5;
Tempo = 0:0.1:20000;

% ===== Integração númerica ==== %
der = @(t,y)funcao(t,y);% f(t,y)=yp (equacao diferencial)
h0=[h0_1;h0_2];
[t,h]=ode45(der,Tempo,h0);

% ==== Plots ==== %
h1 = h(:,1);
```

```
h2 = h(:,2);
figure(1)
plot(t,h1,'LineWidth',2);
hold on
plot(t,h2,'LineWidth',2);
grid on
title("Evolução dos níveis dos reservatórios")
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Altura[m]");
legend("Primeiro Reservatório","Segundo Reservatório");
function h_ponto = funcao(t,y)
% Variáveis
Qe = 0.010247;
h0_1 = 8;
h0_2 = 5;

% Constantes
g = 10;
rho = 1000;
Ra = 2*10^8;
S1 = 10;
S2 = 10;
    h_ponto = [(Qe - sqrt(rho*g*(y(1)-y(2))/Ra))/S1
        (sqrt(rho*g*(y(1)-y(2))/Ra) - sqrt(rho*g*(y(2))/Ra))/S2];
end
```