Lista B

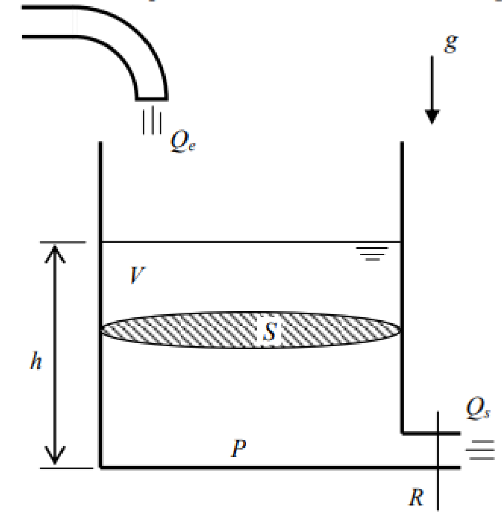
Modelagem

Francisco Samuel Amâncio Lima nº10771594

1. Primeiro Exercício

Exercício:

Implemente um programa no Scilab que resolva numericamente a equação diferencial que modela o sistema abaixo, tanto pelo método de Euler como Runge Kutta.



Reservatório com água
Parâmetros:
S = 10 m^2 - área da seção transversal (constante)
$R = 2\times10^8$ Pa/(m^3/s)^2 - parâmetro que relaciona vazão com queda de pressão (perda de carga)
ρ = 1000 kg/m^3 - massa específica da água
G = 10 m/s^2 - aceleração da gravidade na superfície da terra

Variáveis:
Q_e = 0,010247 m^3/s - vazão de entrada
h: nível do reservatório [m]
V: volume de água no reservatório [m^3]
P: pressão relativa à atmosférica, no fundo do reservatório [Pa]
Q_s: vazão de saída [m^3/s]

Admite-se que a água seja incompressível.

Pela equação da continuidade:

$$\frac{dV}{dt} = Q_e - Q_s$$

Vamos admitir que a perda de carga na saída é modelada pela expressão:

$$P = RQ_s^2 \quad \Rightarrow \quad Q_s = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

Por outro lado, a pressão no fundo do reservatório é:

$$P = \rho g h$$

Volume de água no reservatório:

$$V = Sh \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = S\dot{h}$$

Substituindo:

$$S\dot{h} = Q_e - \sqrt{\frac{\rho g h}{R}}$$

Resultando na seguinte equação difererencial ordinária não linear (modelo de 1 reservatório):

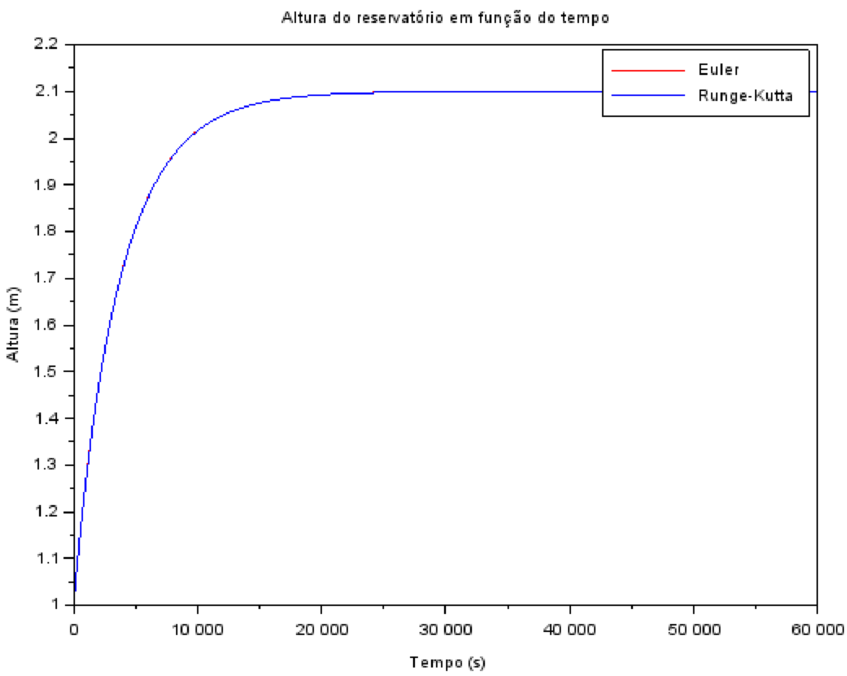
$$\dot{h} = \left(-\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e \right)\frac{1}{S}$$

Considere uma entrada Q_e constante.

Através da equação diferencial ordinária não linear descrita, e tomando os parâmetros citados, foi criado um arquivo em Scilab para resolver o sistema pelo método Euler e Runge Kutta, os resultados podem ser observados graficamente.

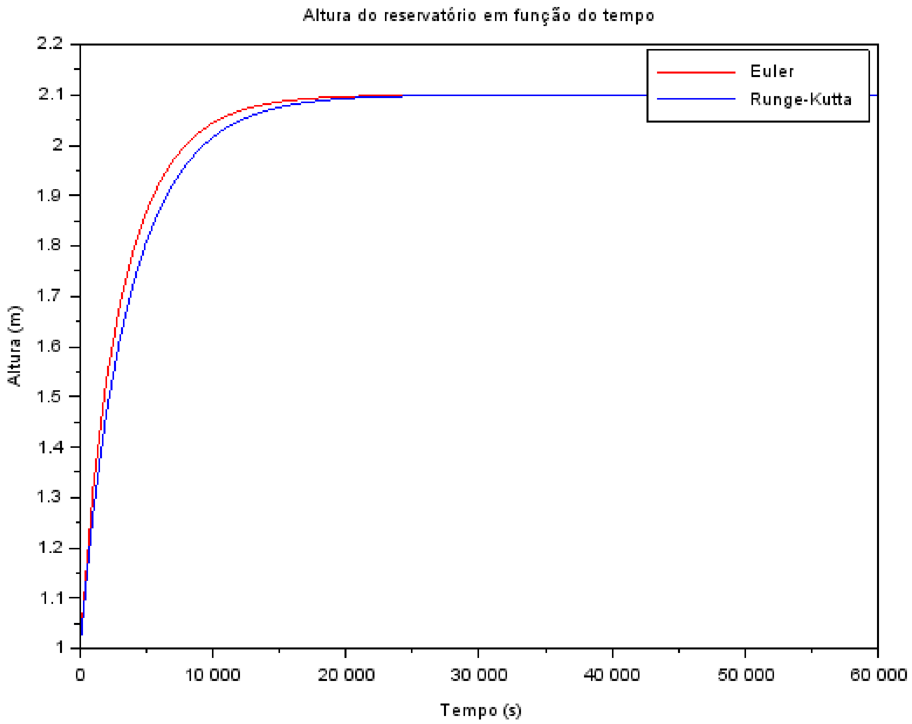
Para as seguintes condições:

$$\begin{cases} h_0 = 1\ m \\ t_f = 60000\ s \\ passo = 10\ s \end{cases}$$



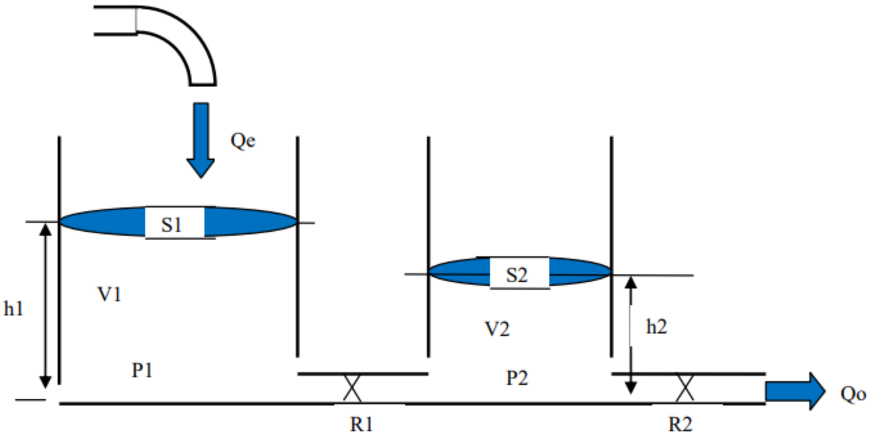
Percebe-se que inicialmente a vazão de entrada é maior que a de saída fazendo a altura do reservatório crescer, com o passar do tempo ocorre a estabilização entre as vazões o que torna a altura constante. Também é interessante de se notar que não a diferença significativa entre os dois métodos numéricos.

Mantendo-se os mesmo parâmetros e alterando somente o *passo* para $1000\ s$, agora sim é possível notar um pequeno 'atraso' do método de Euler em relação ao de Runge Kutta, mas para vetor temporal grande o suficiente isso não é relevante como mostrado anteriormente.



2. Segundo Exercício

Desenvolva um programa em Scilab que resolva numericamente o sistema de equações diferencias que modela o sistema com dois reservatórios, usando tanto Euler como Runge Kutta. Dica: raciocine com vetores.



Modelo do sistema de 2 reservatórios (considere a entrada constante e perdas de carga não lineares como no caso do ex. de 1 tanque).

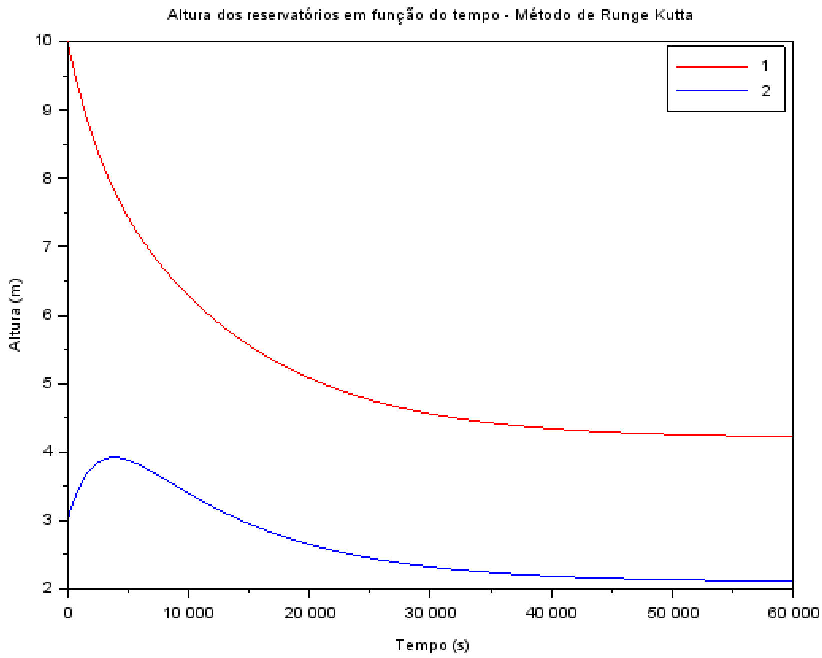
$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \left[Q_e - \sqrt{\dfrac{\rho g}{R_a}(h_1 - h_2)} \right] \dfrac{1}{S_1} \\ \dot{h}_2 = \left[\sqrt{\dfrac{\rho g}{R_a}(h_1 - h_2)} - \sqrt{\dfrac{\rho g}{R_s} h_2} \right] \dfrac{1}{S_2} \end{cases}$$

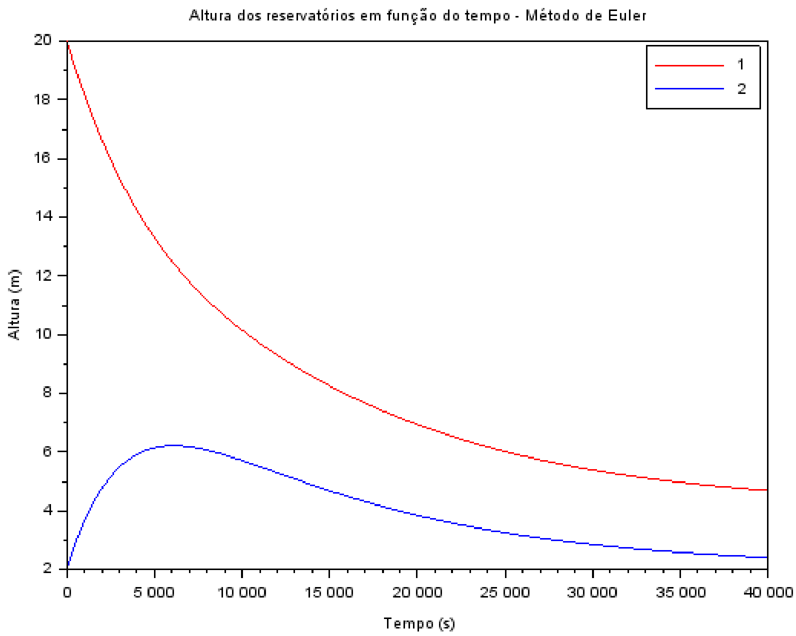
Seguindo a mesma lógica e parâmetros gerais do primeiro exercício, com as seguintes condições:

$$\begin{cases} h_1 = 10\,m \\ h_2 = 3\,m \\ t_f = 60000\,s \\ passo = 10\,s \end{cases}$$

É possível observar pelo gráfico que de inicio no reservatório 1 a vazão de saída é maior que a de entrada, enquanto o reservatório dois apresenta situação contrária com a vazão de entrada sendo maior, até que em determinado ponto isso se inverte, após um dado tempo as vazões se estabilizam e os reservatórios apresentam alturas constantes. E como já foi mencionado não há diferença significativa entre o método de Euler e Runge Kutta.

Francisco Samuel Amâncio Lima nº10771584





3. Código Primeiro Exercício

```
// Apagando dados anteriores:
clear()

//Definindo parâmetros
S = 10 //m^2
R = 2*10^8 //Pa/(m^3/s)^2
rho = 1000 //kg/m^3
g = 10 //m/s^2

//Definindo variáveis
Qe = 0.010247 //m^3/s
h = 1 //m

// função
function [ydot]=funcao(h)
 ydot = (Qe - sqrt(rho*g*h/R))/S
endfunction

// Condição inicial:
y(1)=h;

// Condições tempo
t(1)=0;
tf=60000;
dt=1000;
n=round((tf-t(1))/dt);

// Integracao numerica usando o metodo de Euler:
for i=1:n
 t(i+1)=t(i)+ dt;
 y(i+1)=y(i)+dt*funcao(y(i));
end
y_euler = y

// Integracao numerica usando o metodo de Runge Kutta:
for i=1:n
 k1 = funcao(y(i))
 k2 = funcao(y(i) + dt*k1/2)
 k3 = funcao(y(i) + dt*k2/2)
 k4 = funcao(y(i) + dt*k3)
 y(i+1)= y(i) + dt*((k1+2*k2+2*k3+k4)/6);
end

//Gráficos
plot(t, y_euler, 'r')
plot(t, y)
xtitle("Altura do reservatório em função do tempo", "Tempo (s)", "Altura (m)")
legend(['Euler'; 'Runge-Kutta'])
```

4. Código Segundo Exercício

```
// Apagando dados anteriores:
clear()

//Definindo parâmetros
S = 10 //m^2
R = 2*10^8 //Pa/(m^3/s)^2
rho = 1000 //kg/m^3
g = 10 //m/s^2

//Definindo variáveis
Qe = 0.010247 //m^3/s
R1 = R
R2 = R
S1 = S
S2 = S
h1 = 20 //m
h2 = 2 //m

// função
function [ydot]=funcao1(h1, h2)
 ydot = (Qe - sqrt(rho*g*(h1-h2)/R1))/S1
endfunction

function [ydot]=funcao2(h1, h2)
 ydot = (sqrt(rho*g*(h1-h2)/R1) - sqrt(rho*g*h2/R2))/S2
endfunction

// Condição inicial:
y1(1)=h1;
y2(1)=h2;

// Condições tempo
t(1)=0;
tf=40000;
dt=10;
n=round((tf-t(1))/dt);

// Integracao numerica usando o metodo de Euler:
for i=1:n
 t(i+1)=t(i)+ dt;
 y1(i+1)=y1(i)+dt*funcao1(y1(i),y2(i));
 y2(i+1)=y2(i)+dt*funcao2(y1(i),y2(i));
end
y1_euler = y1
y2_euler = y2

// Integracao numerica usando o metodo de Runge Kutta:
for i=1:n
 k1_1 = funcao1(y1(i),y2(i))
```

```
 k1_2 = funcao2(y1(i),y2(i))

 k2_1 = funcao1(y1(i) + dt*k1_1/2,y2(i) + dt*k1_2/2)
 k2_2 = funcao2(y1(i) + dt*k1_1/2,y2(i) + dt*k1_2/2)

 k3_1 = funcao1(y1(i) + dt*k2_1/2,y2(i) + dt*k2_2)
 k3_2 = funcao2(y1(i) + dt*k2_1/2,y2(i) + dt*k2_2)

 k4_1 = funcao1(y1(i) + dt*k3_1,y2(i) + dt*k3_2)
 k4_2 = funcao2(y1(i) + dt*k3_1,y2(i) + dt*k3_2)

 y1(i+1)= y1(i) + dt*((k1_1+2*k2_1+2*k3_1+k4_1)/6);
 y2(i+1)= y2(i) + dt*((k1_2+2*k2_2+2*k3_2+k4_2)/6);
end

//Gráficos
scf(0)
plot(t, y1, 'r')
plot(t, y2)
xtitle("Altura dos reservatórios em função do tempo - Método de Runge Kutta",
"Tempo (s)", "Altura (m)")
legend(['1'; '2'])

scf(1)
plot(t, y1_euler, 'r')
plot(t, y2_euler)
xtitle("Altura dos reservatórios em função do tempo - Método de Euler", "Tempo (s)",
"Altura (m)")
legend(['1'; '2'])
```