

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos



Lista B

Leonardo Faria de Oliveira – 10706131

Prof. Agenor de Toledo Fleury

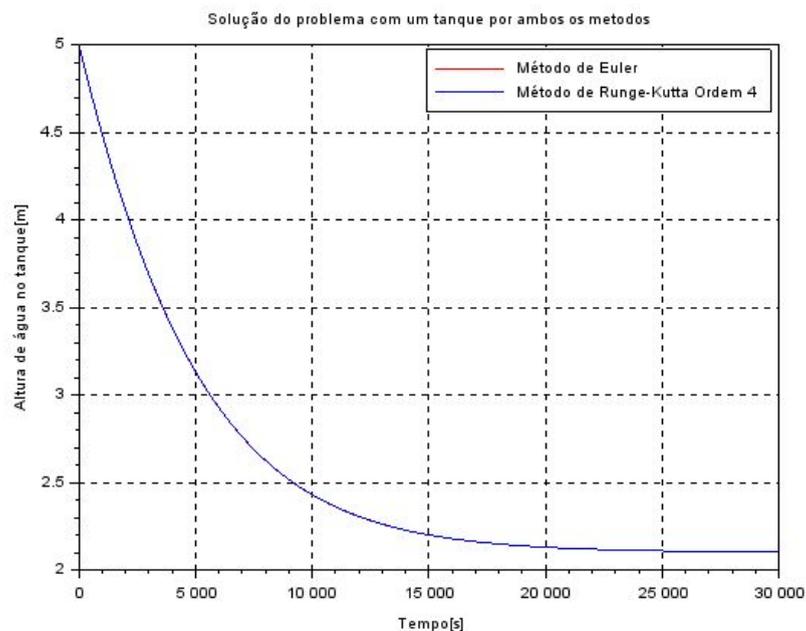
Prof. Decio Crisol Donha

São Paulo, 27 de Agosto de 2020

1. EXERCÍCIO 1

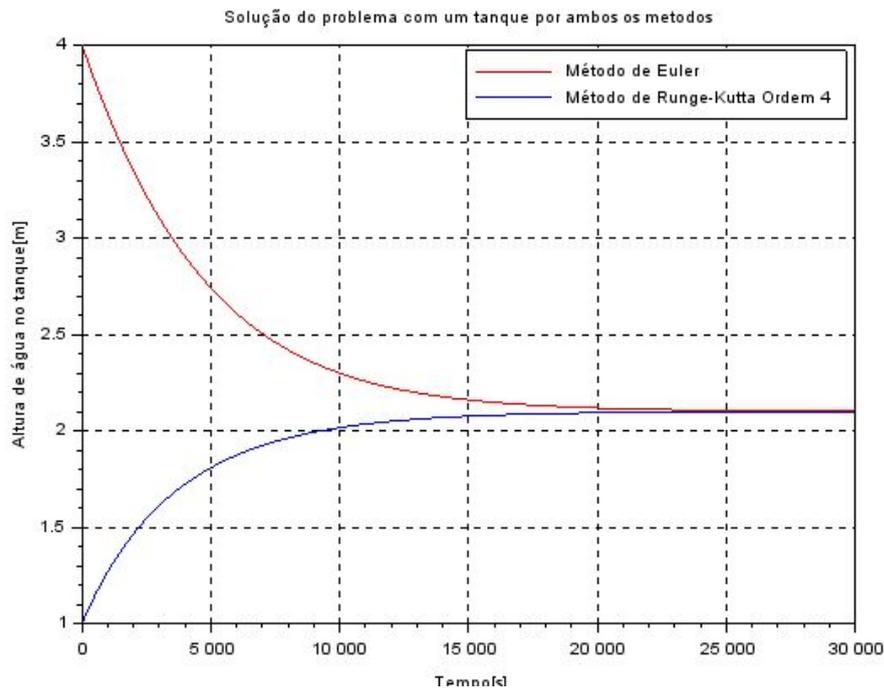
Foi pedido que a equação diferencial que rege o modelo proposto de tanque sendo enchido e esvaziado fosse resolvida através de dois métodos numéricos, método de Euler e Runge Kutta, sendo escolhido o de quarta ordem.

Primeiramente, foi simulado um cenário em o nível do reservatório era de 5m com os dois métodos, para $t = [0:30000]$ s e com um incremento de tempo de 10s para avaliar como ambos os métodos performariam. O seguinte resultado foi obtido:



Percebe-se que só uma linha aparece. Isso indica dado o problema sendo resolvido e o incremento escolhido, não há diferença notável entre os dois métodos. Também é possível notar que o nível d'água no reservatório tende para aproximadamente 2,1m quando $t \rightarrow \infty$.

Sequencialmente, foi testado um outro cenário, onde o reservatório partia de 4m para o método de Euler e 1m para Runge Kutta:



Daí, percebe-se que independente do nível inicial do reservatório, ele acaba se equilibrando em 2,1m. Isso se deve às forças envolvidas na vazão de entrada e saída de água se encontrarem numa relação que faz as vazões se equilibrarem para esse nível.

A seguir, está reproduzido o código utilizado para a realização do exercício 1:

```
clear

//Parâmetros relevantes do problema dados no enunciado
S=10.0;
R=2*10^8;
rho=1000;
G=10;
Qe=0.010247;

//Definição da função diferencial dada no enunciado
function [dh]=funcao(h);
    dh(1)=-sqrt(rho*G*h(1)/R)+Qe)/S;
endfunction
```

//Condições iniciais para ambos os métodos, limites de integração, passo de integração

```
y_e(1)=5;  
y_rk(1)=5;  
t_e(1)=0;  
t_rk(1)=0;  
tf=30000;  
h=10;  
n=round(tf/h);
```

//Aplicação do método de Euler

```
for i=1:n  
    t_e(i+1)=t_e(i)+h;  
    y_e(i+1)=y_e(i)+h*funcao(y_e(i));  
end
```

//Aplicação do Método de Runge Kutta Ordem 4

```
for i=1:n  
    t_rk(i+1)=t_rk(i)+h;  
    k1=h*funcao(y_rk(i));  
    k2=h*funcao(y_rk(i)+k1/2);  
    k3=h*funcao(y_rk(i)+k2/2);  
    k4=h*funcao(y_rk(i)+k3);  
    y_rk(i+1)=y_rk(i)+((k1+2*k2+2*k3+k4)/6);  
end
```

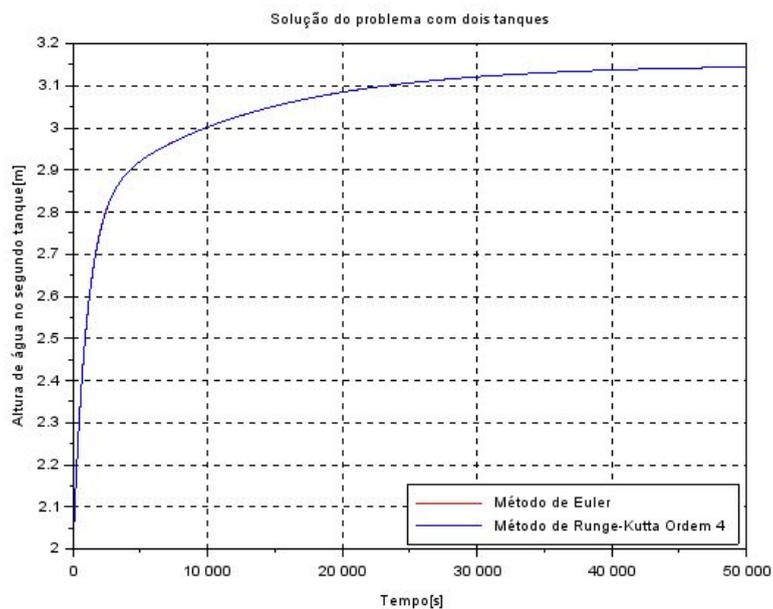
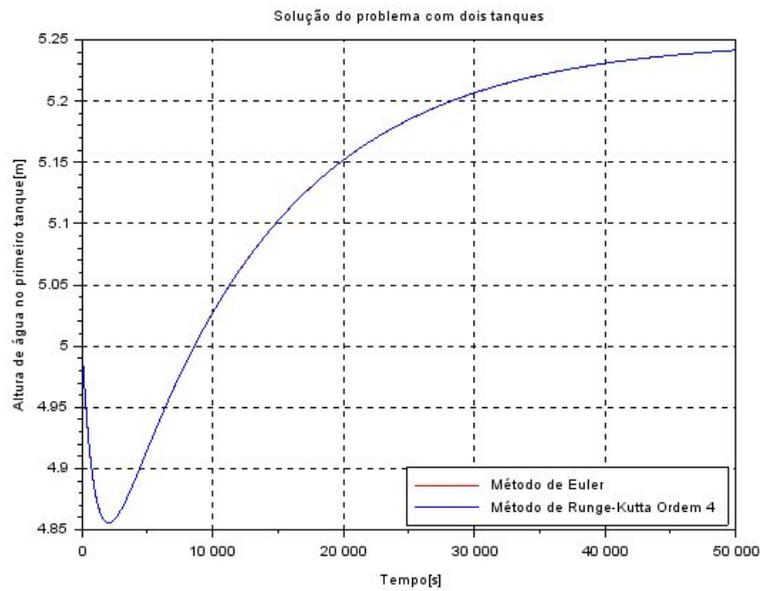
//Plotagem dos gráficos

```
scf(1)  
plot(t_e,y_e, 'r')  
plot(t_rk,y_rk, 'b')  
xgrid  
xtitle("Solução do problema com um tanque por ambos os metodos")  
xlabel("Tempo[s]")  
ylabel("Altura de água no tanque[m]")  
legend('Método de Euler', 'Método de Runge-Kutta Ordem 4', 'in_lower_right');
```

2. EXERCÍCIO 2

Agora, o problema a ser resolvido é outro. Após o primeiro tanque, a água é despejada num segundo em vez de ser descartada, e é requisitado que o nível da água em ambos os tanques seja previsto pelo modelo.

Adotando o nível do tanque 1 como 5m e o do tanque 2 como 2m, chegamos aos seguintes resultados:



Notadamente, percebe-se que novamente a linha vermelha não aparece, pois mais uma vez ambos métodos geram resultados bastantes semelhantes.

Ademais, desta vez, quando utilizados outros valores, as curvas diferem bastante entre si, pois as relações entre os fenômenos se torna mais complexa e há mais comportamentos disponíveis dependendo das condições iniciais. Porém, uma coisa se mantém, em $t \rightarrow \infty$, todas as simulações tendem pro mesmo resultado: Nível de aproximadamente 5,2 m no tanque 1 e 3,15 m no tanque 2.

A seguir, está reproduzido o código utilizado para a realização do exercício 2:

```
clear

//Parâmetros relevantes do problema dados no enunciado
S1=10.0;
S2=5.0;
Ra=2*10^8;
Rs=3*10^8;
rho=1000;
G=10;
Qe=0.010247;

//Definição da funções diferenciais dadas no enunciado
function [dh1]=funcaob2h1(h);
    dh1=(-sqrt(rho*G*(h(1)-h(2))/Ra)+Qe)/S1;
endfunction

function [dh2]=funcaob2h2(h);
    dh2=(sqrt(rho*G*(h(1)-h(2))/Ra)-sqrt(rho*G*h(2)/Rs))/S2;
endfunction

//Condições iniciais para ambos os métodos, limites de integração, passo de integração
y_e(1,1)=2;
y_e(2,1)=2;
y_rk(1,1)=2;
y_rk(2,1)=2;
t_e(1)=0;
t_rk(1)=0;
tf=50000;
h=10;
n=round(tf/h);
```

```
//Aplicação do método de Euler
```

```
for i=1:n  
    t_e(i+1)=t_e(i)+h;  
    y_e(1,i+1)=y_e(1,i)+h*funcaob2h1([y_e(1,i),y_e(2,i)]);  
    y_e(2,i+1)=y_e(2,i)+h*funcaob2h2([y_e(1,i),y_e(2,i)]);  
end
```

```
//Aplicação do Metodo de Runge Kutta Ordem 4
```

```
for i=1:n  
    t_rk(i+1)=t_rk(i)+h;  
    y_rk(1,i+1)=y_rk(1,i)+h*funcaob2h1([y_rk(1,i),y_rk(2,i)]);  
    y_rk(2,i+1)=y_rk(2,i)+h*funcaob2h2([y_rk(1,i),y_rk(2,i)]);  
    k11=h*funcaob2h1([y_rk(1,i),y_rk(2,i)]);  
    k12=h*funcaob2h2([y_rk(1,i),y_rk(2,i)]);  
    k21=h*funcaob2h1([y_rk(1,i)+k11/2,y_rk(2,i)+k12/2]);  
    k22=h*funcaob2h2([y_rk(1,i)+k11/2,y_rk(2,i)+k12/2]);  
    k31=h*funcaob2h1([y_rk(1,i)+k21/2,y_rk(2,i)+k22/2]);  
    k32=h*funcaob2h2([y_rk(1,i)+k21/2,y_rk(2,i)+k22/2]);  
    k41=h*funcaob2h1([y_rk(1,i)+k31,y_rk(2,i)+k32]);  
    k42=h*funcaob2h2([y_rk(1,i)+k31,y_rk(2,i)+k32]);  
    y_rk(1,i+1)=y_rk(1,i)+((k11+2*k21+2*k31+k41)/6);  
    y_rk(2,i+1)=y_rk(2,i)+((k12+2*k22+2*k32+k42)/6);  
end
```

```
//Plotagem dos gráficos
```

```
scf(1)  
plot(t_e,y_e(1,:), 'r')  
plot(t_rk,y_rk(1,:), 'b')  
xgrid  
xtitle("Solução do problema com dois tanques")  
xlabel("Tempo[s]")  
ylabel("Altura de água no primeiro tanque[m]")  
legend('Método de Euler', 'Método de Runge-Kutta Ordem 4', 'in_lower_right');
```

```
scf(2)  
plot(t_e,y_e(2,:), 'r')  
plot(t_rk,y_rk(2,:), 'b')  
xgrid  
xtitle("Solução do problema com dois tanques")  
xlabel("Tempo[s]")  
ylabel("Altura de água no segundo tanque[m]")  
legend('Método de Euler', 'Método de Runge-Kutta Ordem 4', 'in_lower_right');
```