UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA – DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exercícios 27/08

Pedro Leonel Giannoni de Oliveira

Número USP: 10335569

São Paulo

2020

1) Exercício 1

a) Sismógrafo

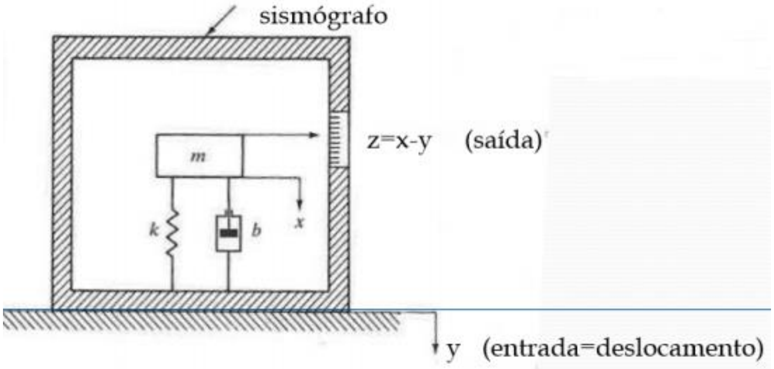

Figura 1 - Esquema do sismógrafo

Com $x > y \Rightarrow \dot{x} > \dot{y}$

•) Forças elástica e viscosa : $F_k = k(x-y)$

$$F_b = b(\dot{x}-\dot{y})$$

•) 2ª Lei de Newton p/ a massa:

$$m.\ddot{x} = -F_k - F_b$$

$$\Rightarrow m.\ddot{x} = -k.(x-y) - b(\dot{x}-\dot{y})$$

$$\Rightarrow \underline{m.\ddot{x} + b.\dot{x} + kx = b\dot{y} + ky} \quad //$$

b) Acelerômetro

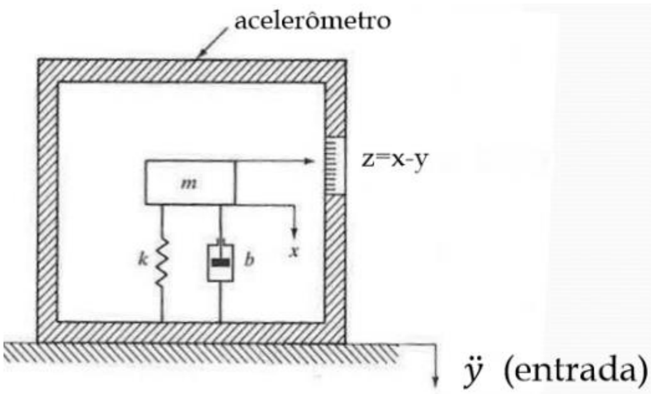

Figura 2 - Esquema do acelerômetro

•) Considerações iniciais: $z = x - y$; $\dot{z} = \dot{x} - \dot{y}$; $\ddot{z} = \ddot{x} - \ddot{y}$

•) 2ª Lei de Newton em função de z e y:

$F_k = k(x-y)$; $F_b = b(\dot{x}-\dot{y})$ $\Rightarrow$ $m.\ddot{x} = -k(x-y) - b(\dot{x}-\dot{y})$

$$\Rightarrow m(\ddot{y}+\ddot{z}) = -k.z - b.\dot{z}$$

$$\Rightarrow \underline{m.\ddot{z} + b.\dot{z} + k.z = -m.\ddot{y}} \;//$$

2) Exercício 2 – Máquina Rotativa

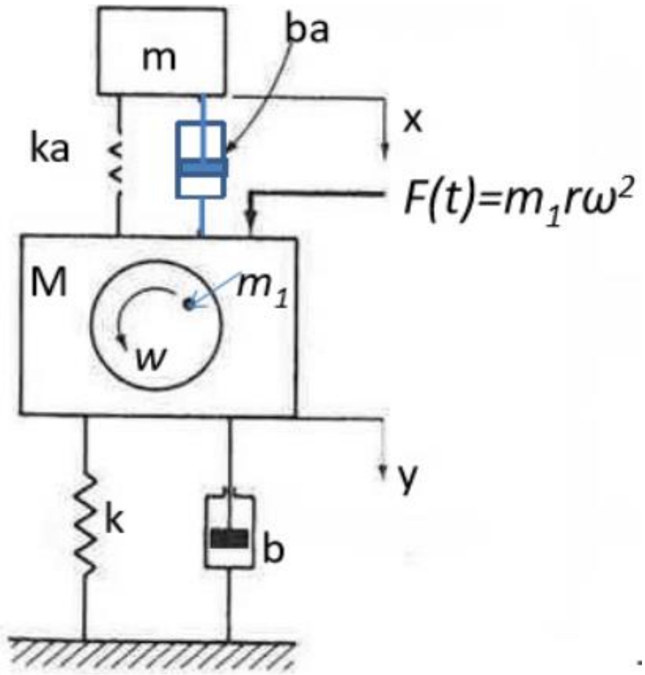

Figura 3 - Esquema da máquina rotativa

•) Considerações iniciais: $x > y \Rightarrow \dot{x} > \dot{y}$

•) Forças: $F_{k1} = k_a(x-y)$; $F_{k2} = k.y$;

$F_{b1} = b_a(\dot{x}-\dot{y})$; $F_{b2} = b.\dot{y}$;

$F(t) = m_1.r.\omega^2$

•) 2ª Lei de Newton p/ massa superior (m):

$$m.\ddot{x} = -F_{k1} - F_{b1} \Rightarrow m.\ddot{x} = -k_a(x-y) - b_a(\dot{x}-\dot{y})$$

$$\Rightarrow \underline{m.\ddot{x} + b_a\dot{x} + k_a.x = b_a.\dot{y} + k_a.y}$$

•) 2ª Lei de Newton p/ massa inferior (M):

$$M.\ddot{y} = F_{k1} + F_{b1} - F_{k2} - F_{b2} + F(t)$$

$$\Rightarrow M.\ddot{y} = k_a(x-y) + b_a(\dot{x}-\dot{y}) - k.y - b.\dot{y} + m_1.r.\omega^2$$

$$\Rightarrow \underline{M.\ddot{y} + (b_a+b).\dot{y} + (k_a+k)y = b_a.\dot{x} + k_a.x + m_1.r.\omega^2}$$

3) Exercício 3 – Carrinho de transporte

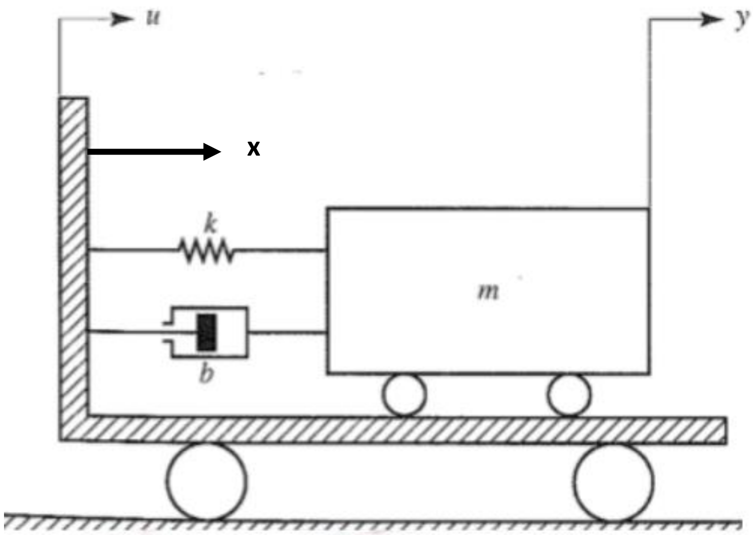

Figura 4 - Esquema do carrinho de transporte

a) Massa da carreta desprezível

Com a massa do carrinho desprezível, a força u atuará diretamente na massa m, sendo a 2ª Lei de Newton p/ este caso:

$$\underline{m \cdot \ddot{y} = u}$$

b) Massa da carreta considerada (M)

Agora, considerando a massa do carrinho (M):

•) Considerações iniciais: $x > y \Rightarrow \dot{x} > \dot{y}$

$F_k = k(x-y)$ ↳ movimento horizontal do carrinho

$F_b = b(\dot{x}-\dot{y})$

•) 2ª Lei de Newton p/ a massa (m):

$$m \cdot \ddot{y} = F_k + F_b = k(x-y) + b(\dot{x}-\dot{y})$$

$$\Rightarrow \underline{m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = b\dot{x} + kx}$$

•) 2ª Lei de Newton p/ o carrinho (M):

$$M \cdot \ddot{x} = u - F_k - F_b = u - k(x-y) - b(\dot{x}-\dot{y})$$

$$\Rightarrow \underline{M \cdot \ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{y} + ky + u}$$

4) Exercício 4 – Meio carro com Lagrange

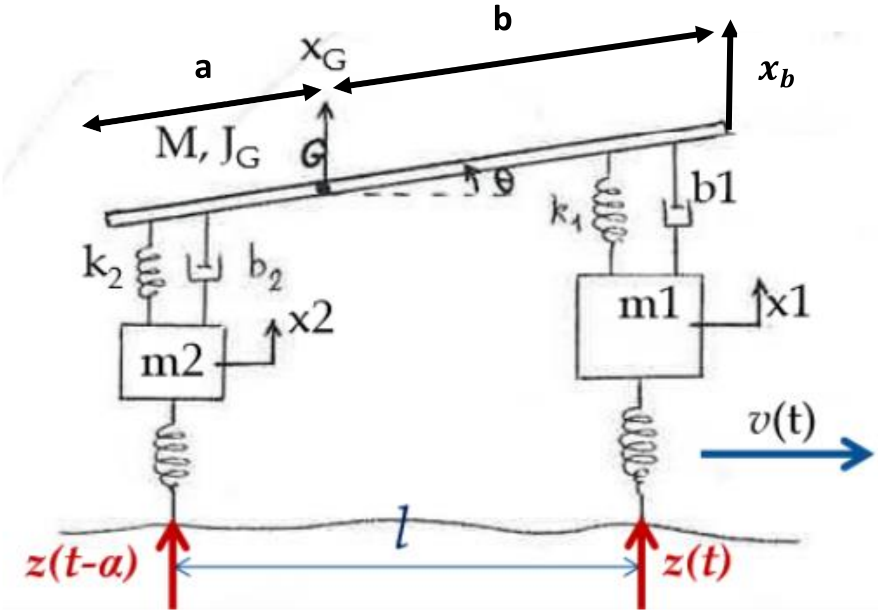

Figura 5 - Esquema de meio carro com Lagrange

a) Grandes movimentos

4) a)

•) Relações cinemáticas:

$$x_b = x_G + b.\text{sen}\theta$$
$$\dot{x}_b = \dot{x}_G + b.\cos(\theta).\dot{\theta}$$

$$x_G = x_a + a.\text{sen}\theta$$
$$\dot{x}_G = \dot{x}_a + a.\cos(\theta).\dot{\theta}$$

•) Energias cinética (T), potencial (V), dissipação (R) e Lagrange (L):

$$T = \frac{m_1 . \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 . \dot{x}_2}{2} + \frac{M . \dot{x}_G^2}{2} + \frac{J . \dot{\theta}^2}{2} \;;$$

$$V = \frac{k_1(x_1 - y_1)^2}{2} + \frac{k_2(x_2 - y_2)^2}{2} + \frac{k_1(x_1 - x_B)^2}{2} + \frac{k_2(x_2 - x_A)^2}{2}$$

$$R = \frac{b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_B)^2}{2} + \frac{b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_A)^2}{2} \quad ; \quad L = T - V$$

•) Lagrange p/ coordenada x_1:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - y_1) - k_1(x_1 - x_B) \;;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 . \dot{x}_1 \;;$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_B) \;;\; \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 . \ddot{x}_1 \;;$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = m_1 . \ddot{x}_1 + k(x_1 - y_1) + k_1(x_1 - x_B) + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_B) = 0$$

$$\Rightarrow m_1 . \ddot{x}_1 + b_1 . \dot{x}_1 + (k + k_1) . x_1 = b_1[\dot{x}_G + b\cos(\theta).\dot{\theta}] + k_1(x_G + b\,\mathrm{sen}\,\theta) + k . y(t)$$

•) Lagrange p/ coordenada x_2:

Analogamente a x_1:

$$m_2 . \ddot{x}_2 + b_2 . \dot{x}_2 + (k + k_2) x_2 = b_2[\dot{x}_G - a\cos(\theta).\dot{\theta}] + k_2(x_G - a\,\mathrm{sen}\,\theta) + k . y(t + l/v)$$

•) Lagrange p/ x_G:

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = k_1(x_1 - x_G) + k_2(x_2 - x_G) \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} = M.\dot{x}_G \; ;$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_G} = -b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_G) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_G) \; ; \; \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G}\right) = M.\ddot{x}_G \; ;$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_G} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_G} = M.\ddot{x}_G - k_1(x_1 - x_G) - k_2(x_2 - x_G) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_G)$$
$$- b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_G) = 0$$

$$\Rightarrow M.\ddot{x}_G + (b_1 + b_2).\dot{x}_G + (k_1 + k_2).x_G = b_1[\dot{x}_1 - b\cos(\theta).\dot{\theta}] + b_2[\dot{x}_2 + a\cos(\theta).\dot{\theta}]$$
$$+ k_1[x_1 - b\,\mathrm{sen}\,\theta] + k_2(x_2 + a\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

•) Lagrange p/ θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k_1(x_1 - b_1).b.\cos\theta + k_2(x_2 - x_a).a.\cos\theta \; ; \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J.\ddot{\theta} \; ;$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = -b_1(\dot{x}_1 - x_G)b\cos\theta + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_a).a.\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \theta} =$$

$$J.\ddot{\theta} - k_1.(x_1 - x_2)b.\cos\theta + k_2(x_2 - x_a)a\cos\theta - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_G)b.\cos\theta +$$
$$b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_a)a\cos\theta$$
$$= 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = J.\ddot{\theta} - k_1.b.\cos(\theta).(x_1 - x_G - b\,\mathrm{sen}\,\theta) + k_2.a.\cos\theta.(x_2 - x_G + a\,\mathrm{sen}\,\theta)$$
$$- b_1.b.\cos(\theta).(\dot{x}_1 - \dot{x}_G - b\cos(\theta).\dot{\theta}) + b_2.a.\cos\theta(\dot{x}_2 - \dot{x}_G + a\cos\theta.\dot{\theta})$$

b) Pequenos movimentos (senθ~θ e cosθ=1)

b) Substituindo $\text{sen}\,\theta = \theta$ e $\cos\theta = 1$ nas equações:

•) x_1

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + b_1 \cdot \dot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 = b_1(b\cdot\dot{\theta} + \dot{x}_G) + k_1(b\cdot\theta + x_G) + k \cdot y(t)$$

•) x_2

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + b_2 \cdot \dot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 = b_2(-a\cdot\dot{\theta} + \dot{x}_G) + k_2(-a\theta + x_G) + k \cdot y(t + l/v)$$

•) x_G

$$M \cdot \ddot{x}_G + (b_1 + b_2)\dot{x}_G + (k_1 + k_2)x_G = b_1(\dot{x}_1 - b\dot{\theta}) + b_2(\dot{x}_2 + a\dot{\theta}) +$$
$$+ k_1(x_1 - b\theta) + k_2(x_2 + a\theta)$$

•) θ

$$J \cdot \ddot{\theta} - k_1 \cdot b(x_1 - b\theta - x_G) + k_2 \cdot a(x_2 + a\theta - x_G) - b \cdot b_1(\dot{x}_1 - b\dot{\theta} - \dot{x}_G)$$
$$+ a \cdot b_2(\dot{x}_2 + a\dot{\theta} - \dot{x}_G) = 0$$