



Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

PME3380 – Modelagem de Sistemas
Dinâmicos
Lista B

Professor: Décio Crisol e Agenor Fleury

Aluno: Ives Caero Vieira NUSP 10355551

São Paulo

2020

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	3
2	EXERCÍCIO I: MODELAGEM DE UM RESERVATÓRIO.....	4
3	EXERCICIO II: MODELAGEM DE DOIS RESERVATÓRIOS	6
4	CONCLUSÃO	9
5	APÊNPIDE I: CÓDIGO EM MATLAB DO EXERCÍCIO I.....	10
6	APÊNPIDE II: CÓDIGO EM MATLAB DO EXERCÍCIO II.....	12

1 INTRODUÇÃO

A lista B consiste em realizar a modelagem de dois sistemas dinâmicos. Primeiramente, busca-se modelar um reservatório com uma vazão de entrada constante e uma vazão de saída dependente da pressão relativa e da perda de carga. Depois, modela-se dois reservatórios acoplados sob a mesma dinâmica, sendo que a vazão de saída do primeiro é a vazão de entrada do segundo.

2 EXERCÍCIO I: MODELAGEM DE UM RESERVATÓRIO

Neste exercício, os parâmetros de interesse do reservatório foram dados e mostrados na figura abaixo. No entanto, é necessário introduzir condições iniciais para particularizar a solução, além de arbitrar um intervalo de tempo para a simulação. Foram escolhidos:

- $h(0) = 5m$;
- $0 \leq t \leq 20000s$, com passo de integração $n = 1s$.

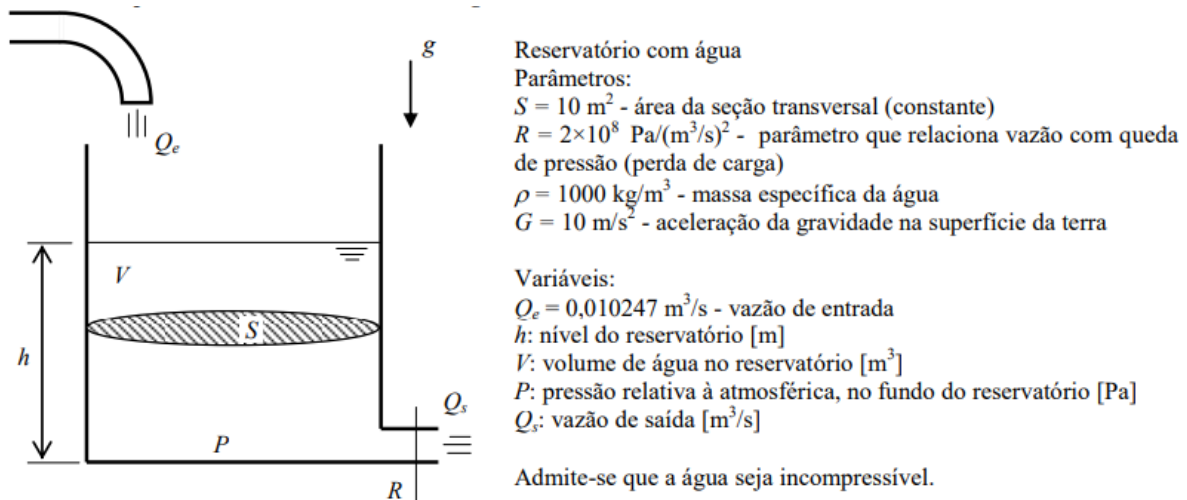


Figura 2.1: Parâmetros de interesse do reservatório

O sistema foi modelado com base nas equações descritas na figura 3.2, e sua solução foi obtida via numericamente pelo método de Euler e por Runge Kutta de 4ª ordem. Posteriormente, foram elaborados gráficos para facilitar a visualização da dinâmica do sistema, mostrados abaixo.

Pela equação da continuidade:

$$\frac{dV}{dt} = Q_e - Q_s$$

Vamos admitir que a perda de carga na saída é modelada pela expressão:

$$P = RQ_s^2 \Rightarrow Q_s = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

Por outro lado, a pressão no fundo do reservatório é:

$$P = \rho gh$$

Considere uma entrada Q_e constante.

Volume de água no reservatório:

$$V = Sh \Rightarrow \dot{V} = S\dot{h}$$

Substituindo:

$$S\dot{h} = Q_e - \sqrt{\frac{\rho gh}{R}}$$

Resultando na seguinte equação diferencial ordinária não linear (modelo de 1 reservatório):

$$\dot{h} = \left(-\sqrt{\frac{\rho gh}{R}} + Q_e \right) \frac{1}{S}$$

Figura 2.2: Modelagem do reservatório

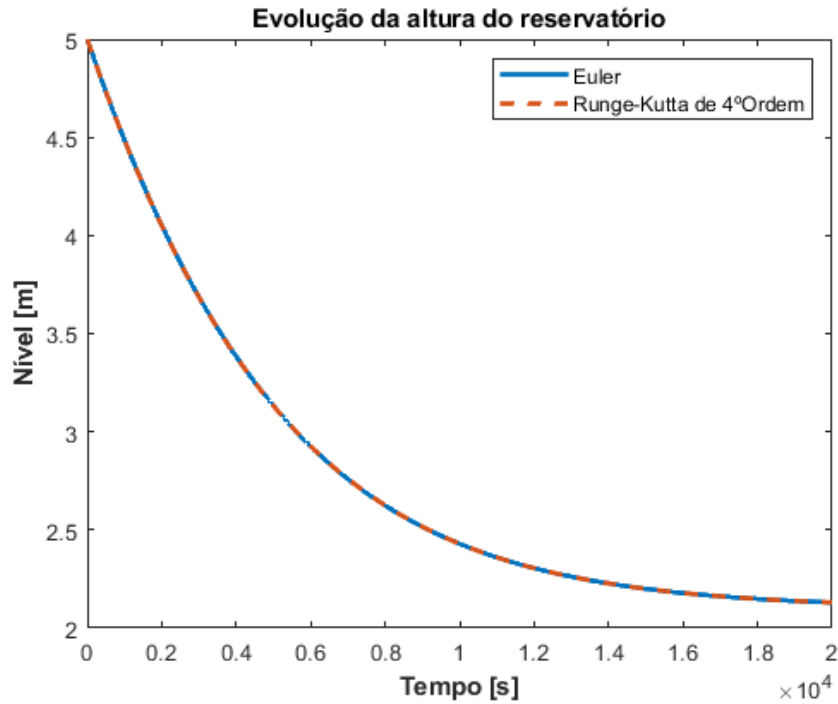


Figura 2.3: Nível do reservatório ao longo do tempo

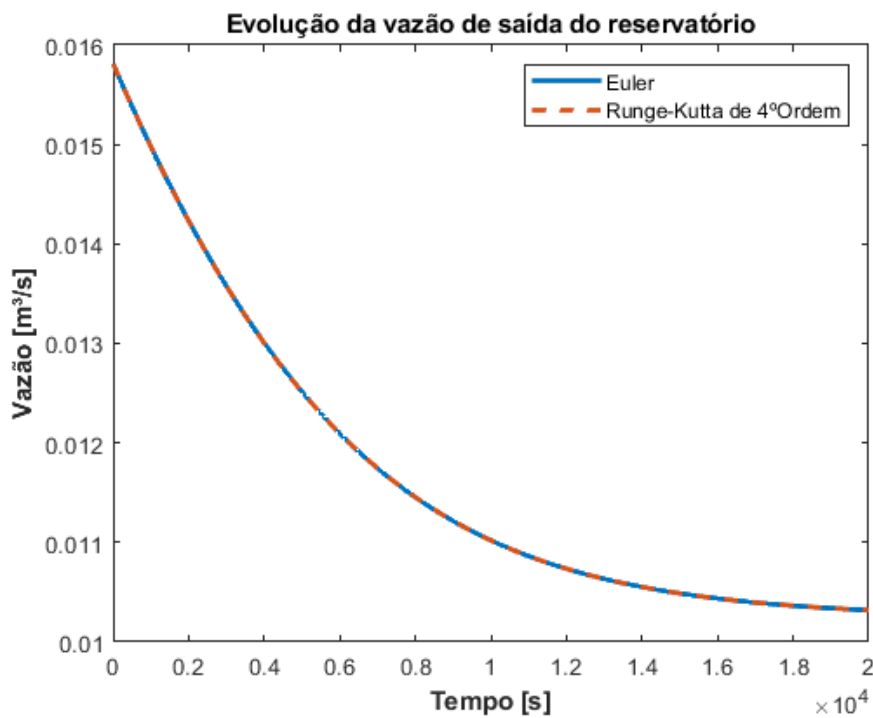


Figura 2.4: Vazão de saída do reservatório ao longo do tempo

Nota-se que o nível do reservatório diminui ao longo do tempo de simulação, uma vez que a vazão de saída é maior que a vazão de entrada. No entanto, o ritmo de queda diminui conforme as duas vazões se aproximam em módulo.

3 EXERCÍCIO II: MODELAGEM DE DOIS RESERVATÓRIOS

No segundo exercício, usa-se abordagem semelhante ao do exercício anterior, com os parâmetros de interesse mostrados abaixo. Foram consideradas como condições iniciais e intervalos de simulação:

- $h_1(0) = 10m$;
- $h_2(0) = 5m$;
- $0 \leq t \leq 10000s$, com passo de integração $n = 1s$.
- Demais propriedades e dimensões iguais ao do reservatório do exercício 1 para os dois tanques.

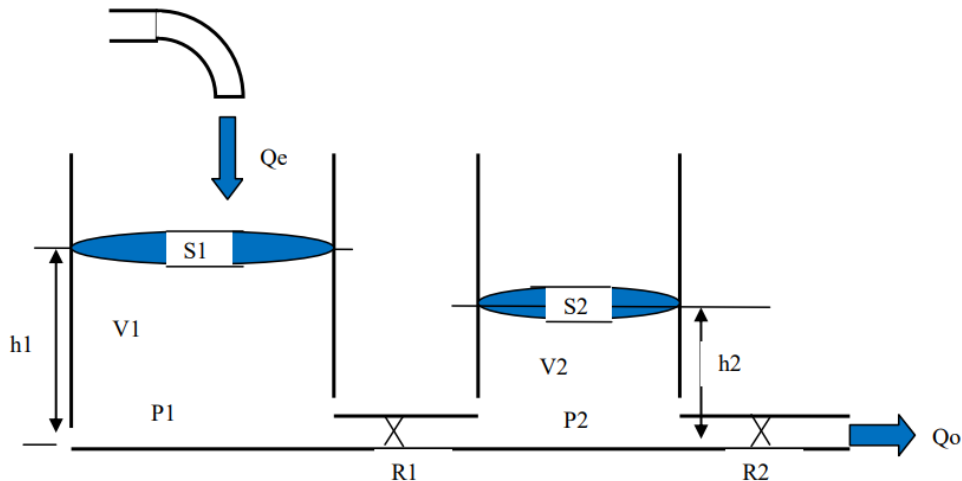


Figura 3.1: Dois reservatórios acoplados

A modelagem agora precisa considerar a interação entre os reservatórios, de modo que as variações do nível são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \left[Q_e - \sqrt{\frac{\rho g}{R_a}} (h_1 - h_2) \right] \frac{1}{S_1} \\ \dot{h}_2 = \left[\sqrt{\frac{\rho g}{R_a}} (h_1 - h_2) - \sqrt{\frac{\rho g}{R_s}} h_2 \right] \frac{1}{S_2} \end{cases}$$

Como realizado anteriormente, a solução foi encontrada através de integração numérica pelo método de Euler e pelo método Runge Kutta de 4ª ordem. Em seguida, foram gerados gráficos para análise, disponíveis abaixo.

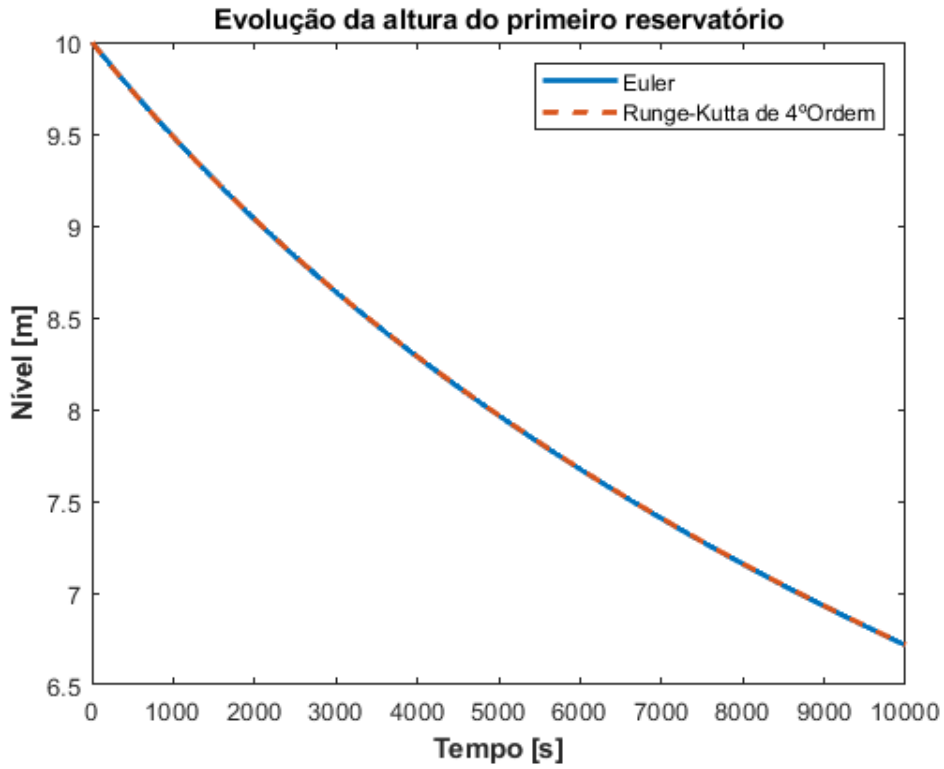


Figura 3.2: Nível do primeiro reservatório ao longo do tempo

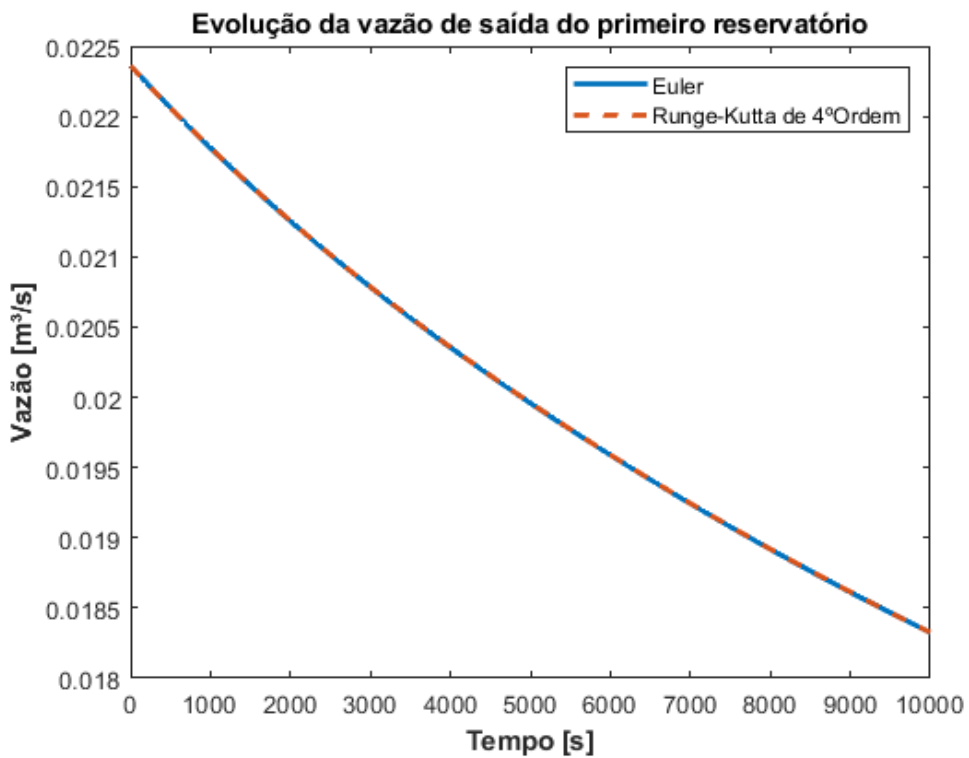


Figura 3.1: Vazão de saída do primeiro reservatório ao longo do tempo

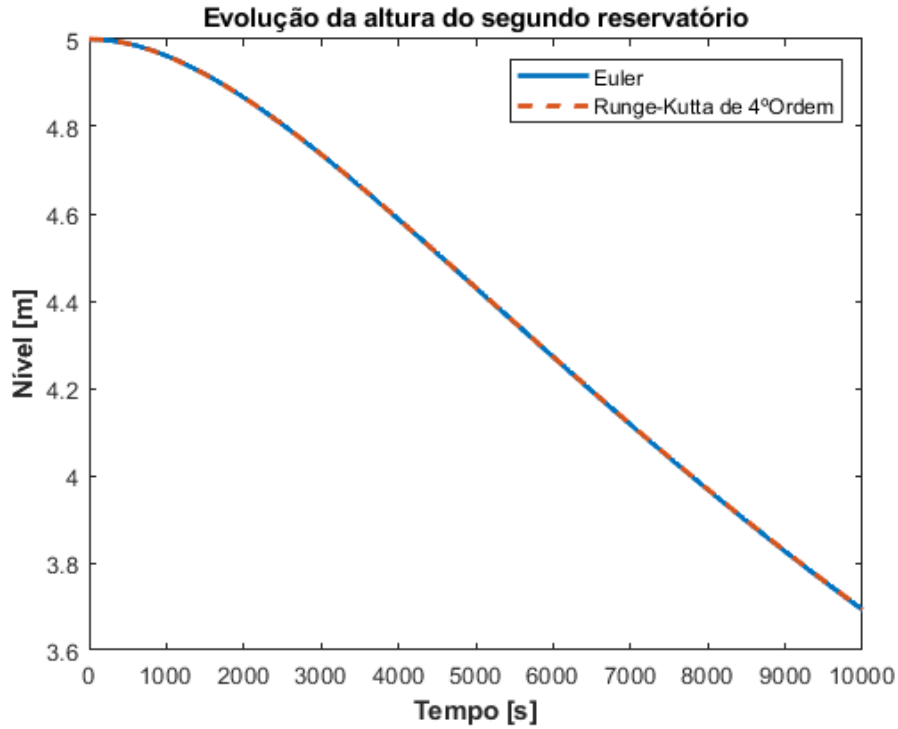


Figura 3.1: Nível do segundo reservatório ao longo do tempo

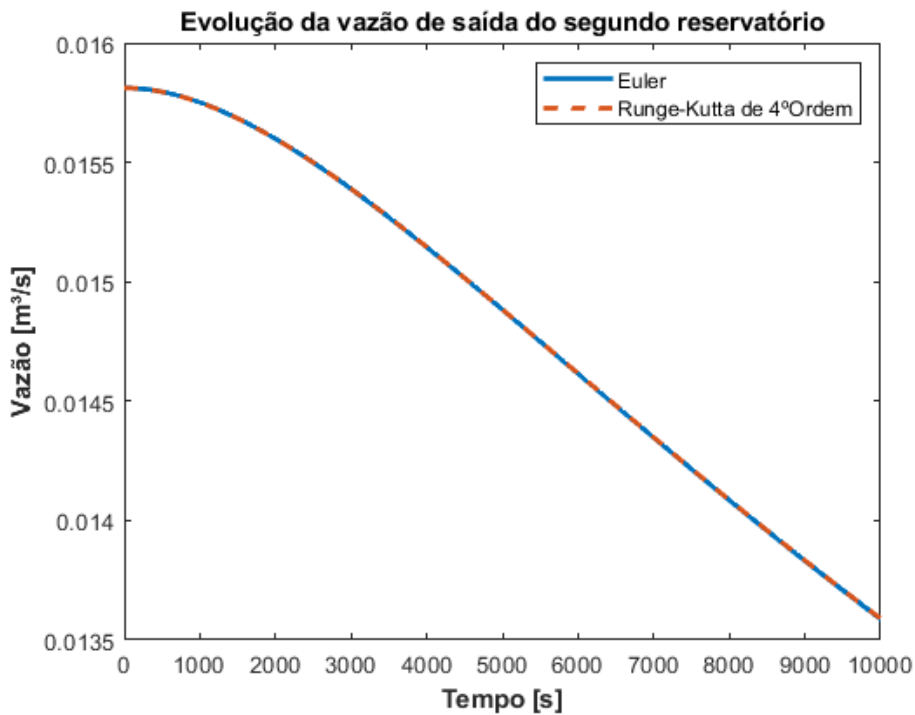


Figura 3.1: Vazão de saída do segundo reservatório ao longo do tempo

Avaliando a vazão de saída do segundo reservatório, vemos que ela é maior que a vazão de entrada Q_e do primeiro reservatório durante todo o intervalo de simulação. Assim, o nível dos reservatórios diminui. Caso essa vazão fosse menor, o nível dos reservatórios aumentaria.

4 CONCLUSÃO

Ao final da atividade, foi possível verificar que ambos métodos de integração numérica atingiram desempenho satisfatório para o problema abordado, o nível de discretização utilizado e o custo computacional requerido. Também pôde-se familiarizar-se com as ferramentas de manipulação vetorial e geração de gráficos.

5 APÊNDICE I: CÓDIGO EM MATLAB DO EXERCÍCIO I

```
1      %PME3380 - Modelagem de sistemas dinâmicos
2      %Aluno: Ives Caero Vieira NUSP: 10355551
3      %Lista B - Equações diferenciais
4
5      %% ===== Exercício 1 ===== %%
6      % === Definindo parametros === %
7      S = 10; % [m^2] - Area da seção transversal
8      R = 2*10^8; % [Pa/(m^3/s)^2] - Relaciona vazão com perda de carga
9      rho = 1000; % [kg/m^3] - Massa específica da água
10     g = 10; % [m/s^2] - Aceleração da gravidade
11
12     ti = 0; % [s] - Instante de tempo inicial
13     tf = 20000; % [s] - Instante de tempo final
14     n = 1; % [s] - Passo de integração
15
16     % === Variaveis === %
17     tempo = ti:n:tf; % [s] - Vetor de tempo
18     Qe = 0.010247; % [m^3/s] - Vazão de entrada
19     h = zeros(1,length(tempo)); % [m] - Vetor do nível do reservatório
20     V = zeros(1,length(tempo)); % [m^3] - Volume do reservatório
21     P = zeros(1,length(tempo)); % [Pa] - Pressão relativa no fundo do reservatório
22     Qs = zeros(1,length(tempo)); % [m^3/s] - Vazão de saída
23
24     h_rk = zeros(1,length(tempo)); % [m] - Vetor do nível do reservatório
25     V_rk = zeros(1,length(tempo)); % [m^3] - Volume do reservatório
26     P_rk = zeros(1,length(tempo)); % [Pa] - Pressão relativa no fundo do reservatório
27     Qs_rk = zeros(1,length(tempo)); % [m^3/s] - Vazão de saída
28     % === Aplicando condições iniciais === %
29     h(1) = 5; % [m]
30     V(1) = h(1)*S; % [m^3]
31     P(1) = rho*g*h(1); % [Pa]
32     Qs(1) = sqrt(P(1)/R); % [m^3/s]
33
34     h_rk(1) = 5; % [m]
35     V_rk(1) = h(1)*S; % [m^3]
36     P_rk(1) = rho*g*h_rk(1); % [Pa]
37     Qs_rk(1) = sqrt(P_rk(1)/R); % [m^3/s]
38
39     % === Integrando por Euler === %
40     for i =2:length(tempo)
41         h(i) = h(i-1) + n*(-sqrt(rho*g*h(i-1)/R)+Qe)/S;
42         V(i) = h(i)*S;
43         P(i) = rho*g*h(i);
44         Qs(i) = sqrt(P(i)./R);
45     end
46
```

```

47 % === Integrando por Runge Kutta === %
48 - c1 = zeros(1,length(tempo)-1);
49 - c2 = zeros(1,length(tempo)-1);
50 - c3 = zeros(1,length(tempo)-1);
51 - c4 = zeros(1,length(tempo)-1);
52 - for i = 2:length(tempo)
53 -     c1(i) = (-sqrt(rho*g*h_rk(i-1)/R)+Qe)/S;
54 -     c2(i) = (-sqrt(rho*g*(h_rk(i-1)+(n/2)*c1(i))/R)+Qe)/S;
55 -     c3(i) = (-sqrt(rho*g*(h_rk(i-1)+(n/2)*c2(i))/R)+Qe)/S;
56 -     c4(i) = (-sqrt(rho*g*(h_rk(i-1)+n*c3(i))/R)+Qe)/S;
57
58 -     h_rk(i) = h_rk(i-1) + n*((c1(i)+2*c2(i)+2*c3(i)+c4(i))/6);
59 -     V_rk(i) = h_rk(i)*S;
60 -     P_rk(i) = rho*g*h_rk(i);
61 -     Qs_rk(i) = sqrt(P_rk(i)/R);
62 - end
63 % === Plotando gráficos === %
64 - figure(1)
65 - plot(tempo,h,"LineWidth",2)
66 - hold on
67 - plot(tempo,h_rk,'--',"LineWidth",2)
68 - title("Evolução da altura do reservatório")
69 - xlabel("Tempo [s]","fontWeight','bold')

```

```

70 - ylabel("Nível [m]","fontWeight','bold')
71 - legend("Euler","Runge-Kutta de 4ªOrdem")
72
73 - figure(2)
74 - plot(tempo,P,"LineWidth",2)
75 - hold on
76 - plot(tempo,P_rk,'--',"LineWidth",2)
77 - title("Evolução da pressão do reservatório")
78 - xlabel("Tempo [s]","fontWeight','bold')
79 - ylabel("Pressão [Pa]","fontWeight','bold')
80 - legend("Euler","Runge-Kutta de 4ªOrdem")
81
82 - figure(3)
83 - plot(tempo,Qs,"LineWidth",2)
84 - hold on
85 - plot(tempo,Qs_rk,'--',"LineWidth",2)
86 - title("Evolução da vazão de saída do reservatório")
87 - xlabel("Tempo [s]","fontWeight','bold')
88 - ylabel("Vazão [m³/s]","fontWeight','bold')
89 - legend("Euler","Runge-Kutta de 4ªOrdem")

```

6 APÊNDICE II: CÓDIGO EM MATLAB DO EXERCÍCIO II

```
1      %PME3380 - Modelagem de sistemas dinâmicos
2      %Aluno: Ives Caero Vieira NUSP: 10355551
3      %Lista B - Equações diferenciais
4
5      %% ===== Exercício 2 ===== %%
6      % === Definindo parametros === %
7      S1 = 10; %[m^2] - Area da seção transversal
8      S2 = 10; %[m^2] - Area da seção transversal
9      R1 = 2*10^8; %[Pa/(m^3/s)^2 - Relaciona vazão com perda de carga
10     R2 = 2*10^8;%[Pa/(m^3/s)^2 - Relaciona vazão com perda de carga
11     rho = 1000; %[kg/m^3] - Massa específica da água
12     g = 10; % [m/s^3] - Aceleração da gravidade
13
14     ti = 0; % [s] - Instante de tempo inicial
15     tf = 10000;% [s] - Instante de tempo final
16     n = 10; % [s] - Passo de integração
17
18     % === Variaveis === %
19     tempo = ti:n:tf;% [s] - Vetor de tempo
20     Qe1 = 0.010247; % [m^3/s] - Vazão de entrada
21     h1 = zeros(1,length(tempo)); % [m] - Vator do nível do reservatório
22     V1 = zeros(1,length(tempo)); % [m^3] - Volume do reservatório
23
24     P1 = zeros(1,length(tempo)); % [Pa] - Pressão relativa no fundo do reservat
25     Qs1 = zeros(1,length(tempo)); % [m^3/s] - Vazão de saída
26
27     Qe2 = zeros(1,length(tempo)); % [m^3/s] - Vazão de entrada
28     h2 = zeros(1,length(tempo)); % [m] - Vator do nível do reservatório
29     V2 = zeros(1,length(tempo)); % [m^3] - Volume do reservatório
30     P2 = zeros(1,length(tempo)); % [Pa] - Pressão relativa no fundo do reservat
31     Qs2 = zeros(1,length(tempo)); % [m^3/s] - Vazão de saída
32
33     h_rk1 = zeros(1,length(tempo)); % [m] - Vetor do nível do reservatório
34     V_rk1 = zeros(1,length(tempo)); % [m^3] - Volume do reservatório
35     P_rk1 = zeros(1,length(tempo)); % [Pa] - Pressão relativa no fundo do reser
36     Qs_rk1 = zeros(1,length(tempo)); % [m^3/s] - Vazão de saída
37
38     Qe_rk2 = zeros(1,length(tempo)); % [m^3/s] - Vazão de saída
39     h_rk2 = zeros(1,length(tempo)); % [m] - Vetor do nível do reservatório
40     V_rk2 = zeros(1,length(tempo)); % [m^3] - Volume do reservatório
41     P_rk2 = zeros(1,length(tempo)); % [Pa] - Pressão relativa no fundo do reser
42     Qs_rk2 = zeros(1,length(tempo)); % [m^3/s] - Vazão de saída
43
44     % === Aplicando condições iniciais === %
45     h1(1) = 10; %[m]
46     V1(1) = h1(1)*S1; %[m^3]
```

```

45 - P1(1) = rho*g*h1(1); % [Pa]
46 - Qs1(1) = sqrt(P1(1)/R1); %[m³/s]
47
48 - h2(1) = 5; %[m]
49 - V2(1) = h2(1)*S2; %[m³]
50 - P2(1) = rho*g*h2(1); % [Pa]
51 - Qs2(1) = sqrt(P2(1)/R2); %[m³/s]
52
53 - h_rk1(1) = 10; %[m]
54 - V_rk1(1) = h_rk1(1)*S1; %[m³]
55 - P_rk1(1) = rho*g*h_rk1(1); % [Pa]
56 - Qs_rk1(1) = sqrt(P_rk1(1)/R1); %[m³/s]
57
58 - h_rk2(1) = 5; %[m]
59 - V_rk2(1) = h_rk2(1)*S2; %[m³]
60 - P_rk2(1) = rho*g*h_rk2(1); % [Pa]
61 - Qs_rk2(1) = sqrt(P_rk2(1)/R2); %[m³/s]
62
63
64 % === Integrando por Euler === %
65 - for i =2:length(tempo)
66 -     h1(i) = h1(i-1) + n*(-sqrt(rho*g*(h1(i-1)-h2(i-1))/R1)+Qe1)/S1;

```

```

67 -     V1(i) = h1(i)*S1;
68 -     P1(i) = rho*g*h1(i);
69 -     Qs1(i) = sqrt(P1(i)./R1);
70
71 -     Qe2(i) = Qs1(i);
72 -     h2(i) = h2(i-1) + n*(-sqrt(rho*g*h2(i-1)/R2)+sqrt(rho*g*(h1(i-1)-h2(i-1))/R1))/S2;
73 -     V2(i) = h2(i)*S2;
74 -     P2(i) = rho*g*h2(i);
75 -     Qs2(i) = sqrt(P2(i)./R2);
76 - end
77
78 % === Integrando por Runge Kutta === %
79 - c1_1 = zeros(1,length(tempo)-1);
80 - c1_2 = zeros(1,length(tempo)-1);
81 - c1_3 = zeros(1,length(tempo)-1);
82 - c1_4 = zeros(1,length(tempo)-1);
83
84 - c2_1 = zeros(1,length(tempo)-1);
85 - c2_2 = zeros(1,length(tempo)-1);
86 - c2_3 = zeros(1,length(tempo)-1);
87 - c2_4 = zeros(1,length(tempo)-1);
88

```

```

89 - for i = 2:length(tempo)
90     %Calculo dos coeficientes
91     c1_1(i) = (-sqrt(rho*g*(h_rk1(i-1)-h_rk2(i-1))/R1)+Qe1)/S1;
92     c2_1(i) = (-sqrt(rho*g*h_rk2(i-1)/R2)+sqrt(rho*g*((h_rk1(i-1))-(h_rk2(i-1)))/R1))/S2;
93
94     c1_2(i) = (-sqrt(rho*g*((h_rk1(i-1)+(n/2)*c1_1(i))-(h_rk2(i-1)+(n/2)*c2_1(i)))/R1)+Qe1)/S1;
95     c2_2(i) = (-sqrt(rho*g*(h_rk2(i-1)+(n/2)*c2_1(i))/R2)+sqrt(rho*g*((h_rk1(i-1)+(n/2)*c1_1(i))-(h_rk2(i-1)))/R1))/S2;
96
97     c1_3(i) = (-sqrt(rho*g*((h_rk1(i-1)+(n/2)*c1_2(i))-(h_rk2(i-1)+(n/2)*c2_2(i)))/R1)+Qe1)/S1;
98     c2_3(i) = (-sqrt(rho*g*(h_rk2(i-1)+(n/2)*c2_2(i))/R2)+sqrt(rho*g*((h_rk1(i-1)+(n/2)*c1_2(i))-(h_rk2(i-1)))/R1))/S2;
99
100    c1_4(i) = (-sqrt(rho*g*((h_rk1(i-1)+n*c1_3(i))-(h_rk2(i-1)+(n/2)*c2_3(i)))/R1)+Qe1)/S1;
101    c2_4(i) = (-sqrt(rho*g*(h_rk2(i-1)+n*c2_3(i))/R2)+sqrt(rho*g*((h_rk1(i-1)+(n/2)*c1_3(i))-(h_rk2(i-1)+(n/2)*c2_3(i)))/R1))/S2;
102
103    %Equações relativas ao primeiro reservatorio
104    h_rk1(i) = h_rk1(i-1) + n*((c1_1(i)+2*c1_2(i)+2*c1_3(i)+c1_4(i))/6);
105    V_rk1(i) = h_rk1(i)*S1;
106    P_rk1(i) = rho*g*h_rk1(i);
107    Qs_rk1(i) = sqrt(P_rk1(i)/R1);
108
109    %Condição de vínculo : vazão de saída do reservatorio 1 é a razão de
110    %entrada do reservatório 2

```

```

111 -     Qe_rk2(i) = Qs_rk1(i);
112
113     %Equações relativas ao segundo reservatório
114     h_rk2(i) = h_rk2(i-1) + n*((c2_1(i)+2*c2_2(i)+2*c2_3(i)+c2_4(i))/6);
115     V_rk2(i) = h_rk2(i)*S2;
116     P_rk2(i) = rho*g*h_rk2(i);
117     Qs_rk2(i) = sqrt(P_rk2(i)/R2);
118 - end
119 % === Plotando gráficos === %
120 %Reservatório 1
121 - figure(1)
122 - plot(tempo,h1,"LineWidth",2)
123 - hold on
124 - plot(tempo,h_rk1,'--',"LineWidth",2)
125 - title("Evolução da altura do primeiro reservatório")
126 - xlabel("Tempo [s]","fontWeight','bold')
127 - ylabel("Nível [m]","fontWeight','bold')
128 - legend("Euler","Runge-Kutta de 4ºOrdem")
129
130 - figure(2)
131 - plot(tempo,P1,"LineWidth",2)
132 - hold on

```

```

133 - plot(tempo,P_rk1,'--',"LineWidth",2)
134 - title("Evolução da pressão do primeiro reservatório")
135 - xlabel("Tempo [s]","fontWeight','bold')
136 - ylabel("Pressão [Pa]","fontWeight','bold')
137 - legend("Euler","Runge-Kutta de 4°Ordem")
138
139 - figure(3)
140 - plot(tempo,Qs1,"LineWidth",2)
141 - hold on
142 - plot(tempo,Qs_rk1,'--',"LineWidth",2)
143 - title("Evolução da vazão de saída do primeiro reservatório")
144 - xlabel("Tempo [s]","fontWeight','bold')
145 - ylabel("Vazão [m³/s]","fontWeight','bold')
146 - legend("Euler","Runge-Kutta de 4°Ordem")
147
148 %Reservatório 2
149 - figure(4)
150 - plot(tempo,h2,"LineWidth",2)
151 - hold on
152 - plot(tempo,h_rk2,'--',"LineWidth",2)
153 - title("Evolução da altura do segundo reservatório")
154 - xlabel("Tempo [s]","fontWeight','bold')

```

```

155 - ylabel("Nível [m]","fontWeight','bold')
156 - legend("Euler","Runge-Kutta de 4°Ordem")
157
158 - figure(5)
159 - plot(tempo,P2,"LineWidth",2)
160 - hold on
161 - plot(tempo,P_rk2,'--',"LineWidth",2)
162 - title("Evolução da pressão do segundo reservatório")
163 - xlabel("Tempo [s]","fontWeight','bold')
164 - ylabel("Pressão [Pa]","fontWeight','bold')
165 - legend("Euler","Runge-Kutta de 4°Ordem")
166
167 - figure(6)
168 - plot(tempo,Qs2,"LineWidth",2)
169 - hold on
170 - plot(tempo,Qs_rk2,'--',"LineWidth",2)
171 - title("Evolução da vazão de saída do segundo reservatório")
172 - xlabel("Tempo [s]","fontWeight','bold')
173 - ylabel("Vazão [m³/s]","fontWeight','bold')
174 - legend("Euler","Runge-Kutta de 4°Ordem")

```