ESCOLA POLITÉCNICA DA USP

LISTA B

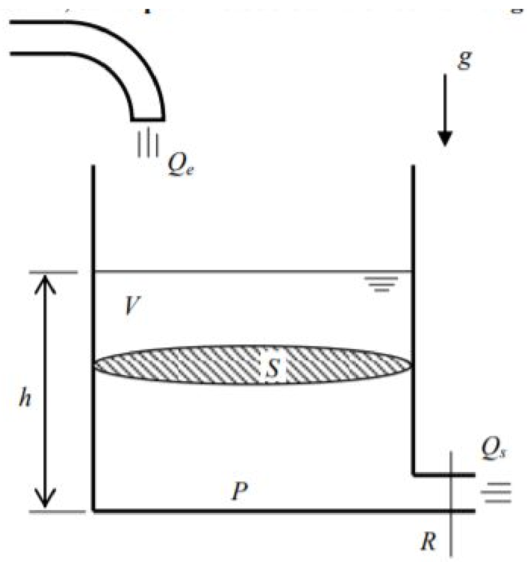
Nome: Wallace Moreira e Silva
NUSP: 10823772
Disciplina: Modelagem

São Paulo, 2020

SUMÁRIO

1. PRIMEIRO EXERCÍCIO

Implemente um programa no Scilab que resolva numericamente a equação diferencial que modela o sistema abaixo, tanto pelo método de Euler como Runge Kutta.



PARÂMETROS	VALOR NUMÉRICO
Área da seção transversal	10 m^2
Relação vazão x queda de pressão	2 x 10^8
Massa específica da água	1000 kg/m^3
Aceleração da gravidade	10 m/s^2

VARIÁVEIS
Vazão de entrada
Nível do reservatório
Volume de água no reservatório
Pressão relativa à atmosférica
Vazão de saída

1.1 MÉTODO DE EULER (1º EXERCÍCIO)

```
//FUNÇÃO
function [hp]=f(h, rho, g, R, Qe, S)
 hp = (-sqrt(rho*g*h/R) + Qe)/S;
endfunction

//PARÂMETROS
rho = 1000; // Massa específica da água
g = 10;     //Aceleração da gravidade na superfície da terra
R = 2e+8;   //parâmetro que relaciona vazão com queda de pressão (perda de carga)
Qe = 0.010247;  //Vazão de entrada
S = 10;        //Área da seção transversal (constante)

//INTERVALO DE TEMPO
ti = 0;
tf = 40000;

//PASSO
n = 80000;
h = (tf-ti)/n;
t = zeros(n+1,1)

//MÉTODO DE EULER
for i = 2:n+1
 t(i,1) = t(i-1,1) + h
end
H = zeros(n+1,1);
for i = 2:n+1
 H(i,1) = H(i-1,1) + h*f(H(i-1,1), rho, g, R, Qe, S)
end

//GRÁFICOS
plot(t,H, "r");
title("Método de Euler - 1 Reservatório", "fontsize", 5)
xlabel("tempo (s)", "fontsize", 4)
ylabel("nível (m)]", "fontsize", 4);
```

1.2 MÉTODO DE RK (1º EXERCÍCIO)

//FUNÇÃO

```
function [hp]=f(h, rho, g, R, Qe, S)
 hp = (-sqrt(rho*g*h/R)+ Qe)/S;
endfunction
```

//PARÂMETROS

```
g = 10;        //aceleração da gravidade na superfície da terra
R = 2e+8;      //parâmetro que relaciona vazão com queda de pressão (perda de carga)
S = 10;        //área da seção transversal (constante)
Qe = 0.010247; //vazão de entrada
rho = 1000;    //massa específica da água
```

//INTERVALO DE TEMPO

```
ti = 0;
tf = 40000;
n = 80000;

//PASSO
h = (tf-ti)/n;
t = zeros(n+1,1)
```

//MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE 4ª ORDEM

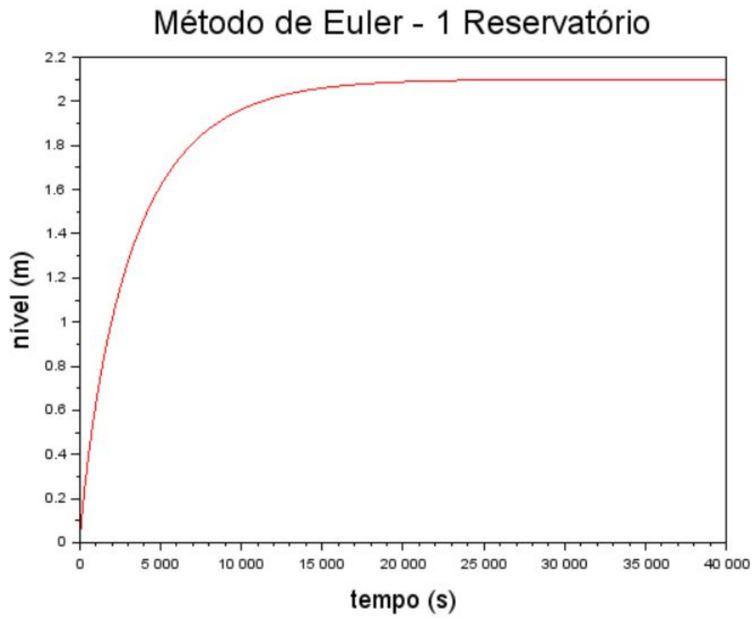
```
for i = 2:n+1
 t(i,1) = t(i-1,1) + h
end
H = zeros(n+1,1);

// Agora aplica-se o Método de Runge Kutta de 4 ordem
// Para esse método iremos precisar encontrar 4 inclinações gráficas
// Teremos de inclinações: k_1, k_2, k_3, k_4
// A primeira inclinação (k_1) é a inclinação de Euler no início de um intervalo
// A segunda inclinação (k_2) é a onde encontramos a estimativa do valor de y na mletragregade do intervalo, através de k_1
// A terceira inclinação (k_3) será onde se obtém um segundo y calculado na mletragregade de um intervalo, através de k_2
// A quarta inclinação (k_4) é onde calcularemos um y no final do intervalo

for i = 2:n+1
 k1 = f(H(i-1,1), rho, g, R, Qe, S);
 k2 = f(H(i-1,1) + h*0.5*k1, rho, g, R, Qe, S);
 k3 = f(H(i-1,1) + h*0.5*k2, rho, g, R, Qe, S);
 k4 = f(H(i-1,1) + h*k3, rho, g, R, Qe, S);
```

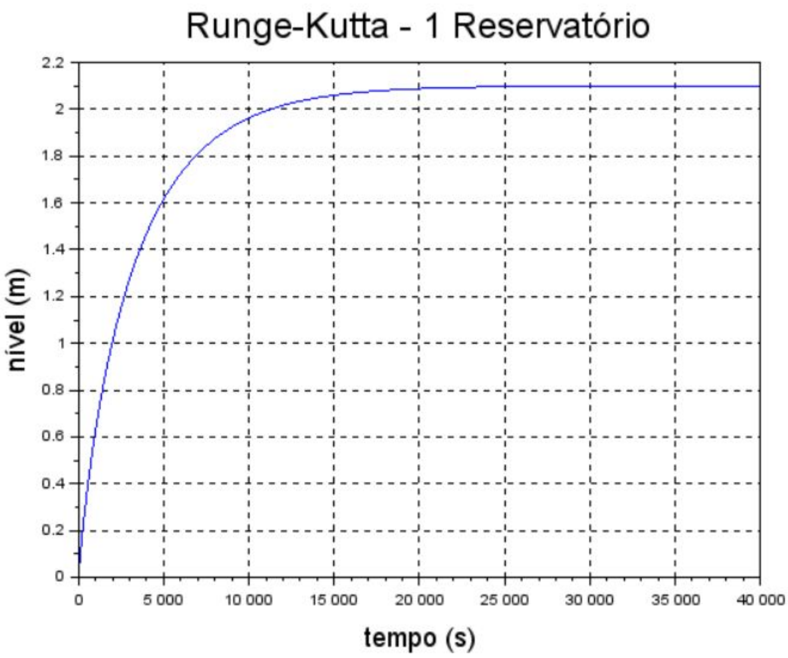
```
// Em posse destas 4 inclinações iremos calcular "apenas 1"
// Com o intuito de encontrarmos o valor da estimativa de y ao final do intervalo
// Essa inclinação é uma média ponderada
// Inclinação final = Kfinal = 1/6*(k_1(3)+2*k_2(3)+2*k_3(3)+k_4(3))
// Com isso podemos obter o y(i+1)
// y(i+1) = y(i) + Kfinal*h
 H(i,1) = H(i-1,1) + (h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end
```

//GRÁFICOS

```
plot(t,H);
title("Runge-Kutta - 1 Reservatório", "fontsize", 5)
xlabel("tempo (s)", "fontsize", 4)
ylabel("nível (m)", "fontsize", 4)
xgrid(1);
```

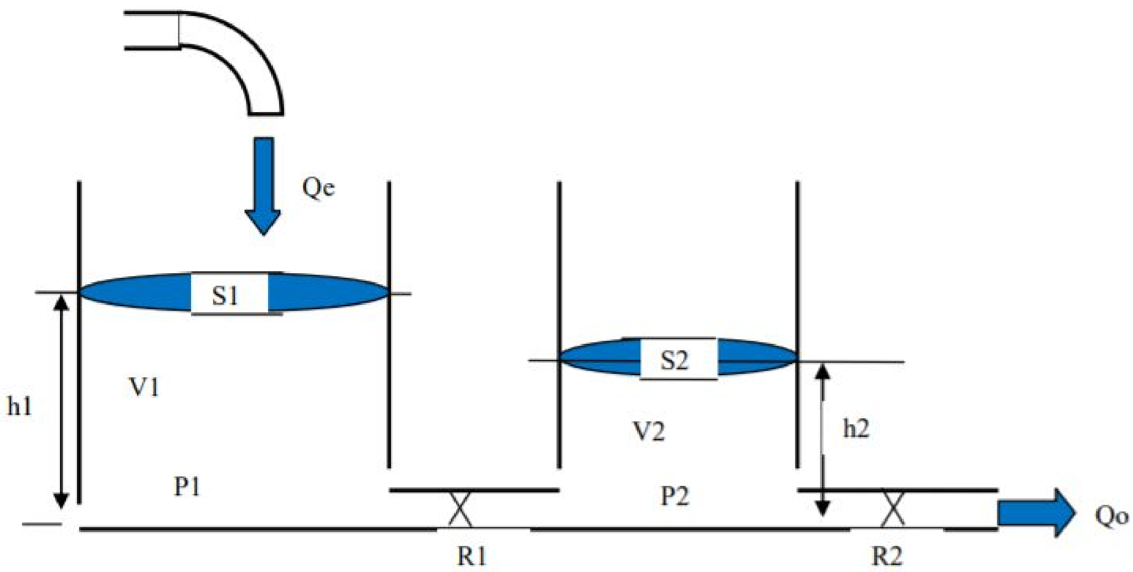
1.3 GRÁFICOS 1º EXERCÍCIO (EULER - RK)





2. SEGUNDO EXERCÍCIO

Desenvolva um programa em Scilab que resolva numericamente o sistema de equações diferenciais que modela o sistema com dois reservatórios, usando tanto Euler como Runge Kutta. Dica: raciocine com vetores.



Modelo do sistema de 2 reservatórios (considere a entrada constante e perdas de carga não lineares como no caso do ex. de 1 tanque).

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \left[Q_e - \sqrt{\dfrac{\rho g}{R_a}(h_1 - h_2)} \right] \dfrac{1}{S_1} \\ \dot{h}_2 = \left[\sqrt{\dfrac{\rho g}{R_a}(h_1 - h_2)} - \sqrt{\dfrac{\rho g}{R_s} h_2} \right] \dfrac{1}{S_2} \end{cases}$$

2.1 MÉTODO DE EULER (2º EXERCÍCIO)

```
//FUNÇÃO
function [hp1]=f1(H1, H2, Qe, densidade, gravidade, Ra, S1)
 hp1 = (Qe-sqrt(densidade*gravidade*(H1-H2)/Ra))/S1;
endfunction
function [hp2]=f2(H1, H2, densidade, gravidade, Ra, Rs, S2)
 hp2 = (sqrt(densidade*gravidade*(H1-H2)/Ra)-sqrt(densidade*gravidade*H2/Rs))/S2;
endfunction

//PARÂMETROS
Ra = 2e+8;
S1 = 10;
Rs = 1e+8;
S2 = 8;
Qe = 0.010247;
densidade = 1000;
gravidade = 10;

//INTERVALO DE TEMPO
ti = 0;
tf = 40000;
n = 80000;

//PASSO
h = (tf-ti)/n;
t = zeros(n+1,1)

//MÉTODO DE EULER
for i = 2:n+1
 t(i,1) = t(i-1,1) + h;
end
H1 = zeros(n+1,1);
H2 = zeros(n+1,1);
for i = 2:n+1
 H1(i,1) = H1(i-1,1) + h*f1(H1(i-1,1), H2(i-1,1), Qe, densidade, gravidade, Ra, S1);
 H2(i,1) = H2(i-1,1) + h*f2(H1(i-1,1), H2(i-1,1), densidade, gravidade, Ra, Rs, S2)
end

//GRÁFICO
plot2d([t,t],[H1,H2],[1 2]);
title("Reservatórios - Runge-Kutta", "fontsize", 4)
xlabel("tempo (s)", "fontsize", 3)
ylabel("nível (m)", "fontsize");
```

2.2 MÉTODO DE RK (2º EXERCÍCIO)

```
//FUNÇÃO DO PRIMEIRO RESERVATÓRIO
function [hp1]=f1(h1, h2, Qe, densidade, g, Ra, S1)
 hp1 = (Qe-sqrt(densidade*g*(h1-h2)/Ra))/S1;
endfunction

//FUNÇÃO DO SEGUNDO RESERVATÓRIO
function [hp2]=f2(h1, h2, densidade, g, Ra, Rs, S2)
 hp2 = (sqrt(densidade*g*(h1-h2)/Ra)-sqrt(densidade*g*h2/Rs))/S2;
endfunction

//PARÂMETROS
Ra = 2e+8;
S1 = 10;
Rs = 1e+8;
S2 = 8;
Qe = 0.010247;
densidade = 1000;
g = 10;

//INTERVALO DE TEMPO
ti = 0;
tf = 30000;
n = 60000;

//PASSO
h = (tf-ti)/n;
t = zeros(n+1,1)

//MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM
for i = 2:n+1
 t(i,1) = t(i-1,1) + h;
end
h1 = zeros(n+1,1);
h2 = zeros(n+1,1);
for i = 2:n+1
```

```
// Agora aplica-se o Método de Runge Kutta de 4 ordem
// Para esse método iremos precisar encontrar 4 inclinações gráficas
// Teremos de inclinações: k_1, k_2, k_3, k_4
// A primeira inclinação (k_1) é a inclinação de Euler no inicio de um intervalo
// A segunda inclinação (k_2) é a onde encontramos a estimativa do valor de y na mletragregade do
intervalo, através de k_1
// A terceira inclinação (k_3) será onde se obtem um segundo y calculado na mletragregade de um
intervelo, através de k_2
// A quarta inclinação (k_4) é onde calcularemos um y no final do intervelo

 k1 = f1(h1(i-1,1), h2(i-1,1), Qe, densidade, g, Ra, S1);
 k2 = f1(h1(i-1,1) + h*0.5*k1, h2(i-1,1) + h*0.5*k1, Qe, densidade, g, Ra, S1);
 k3 = f1(h1(i-1,1) + h*0.5*k2, h2(i-1,1) + h*0.5*k2, Qe, densidade, g, Ra, S1);
 k4 = f1(h1(i-1,1) + h*k3, h2(i-1,1) + h*k3, Qe, densidade, g, Ra, S1);

 // Em posse destas 4 inclinações iremos calcular "apenas 1"
// Com o intuito de encontramos o valor da estimativa de y ao final do intervalo
// Esssa inclinação é uma média ponderada
// Inclinação final = Kfinal = 1/6*(k_1(3)+2*k_2(3)+2*k_3(3)+k_4(3))
// Com isso podemos obter o y(i+1)
// y(i+1) = y(i) + Kfinal*h

 h1(i,1) = h1(i-1,1) + (h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

//Repete-se o mesmo passo para integração numérica
 k1 = f2(h1(i-1,1), h2(i-1,1), densidade, g, Ra, Rs, S2);
 k2 = f2(h1(i-1,1) + h*0.5*k1, h2(i-1,1) + h*0.5*k1, densidade, g, Ra, Rs, S2);
 k3 = f2(h1(i-1,1) + h*0.5*k2, h2(i-1,1) + h*0.5*k2, densidade, g, Ra, Rs, S2);
 k4 = f2(h1(i-1,1) + h*k3, h2(i-1,1) + h*k3, densidade, g, Ra, Rs, S2);
 h2(i,1) = h2(i-1,1) + (h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end

//GRÁFICOS
plot2d([t,t],[h1,h2],[1 2]);
legends(["RESERVATÓRIO 1", "RESERVATÓRIO 2"],[1,2],4)
title("Nível dos reservatórios pelo método de Runge-Kutta", "fontsize", 4)
xlabel("Tempo [s]", "fontsize", 3)
ylabel("Nível do reservatório [m]", "fontsize", 3);
```

2.3 GRÁFICOS 2º EXERCÍCIO (EULER - RK)