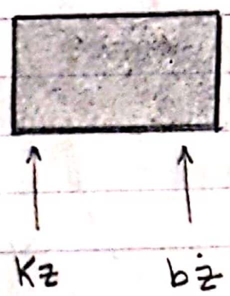
Nome: Wallace Moreira e Silva
NºUSP: 10823772
Disciplina: Modelagem

Exercícios para casa:
Aula do dia 27/08
Sistemas Mecânicos

1) a) Pelo Teorema do Movimento do Baricentro descreve-se a seguinte equação do Sismógrafo:



$$m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -k(x-y) - b(\dot{x}-\dot{y})$$

Rearranjando a equação diferencial obtem-se

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky}$$

b) No caso do acelerômetro iremos obter a equação diferencial requerida da mesma forma que no Sismógrafo contudo cabe salientar que a entrada é $\ddot{y}$, na qual muda-se a descrição de $\dot{y}$ e y conforme observa-se em seguida:

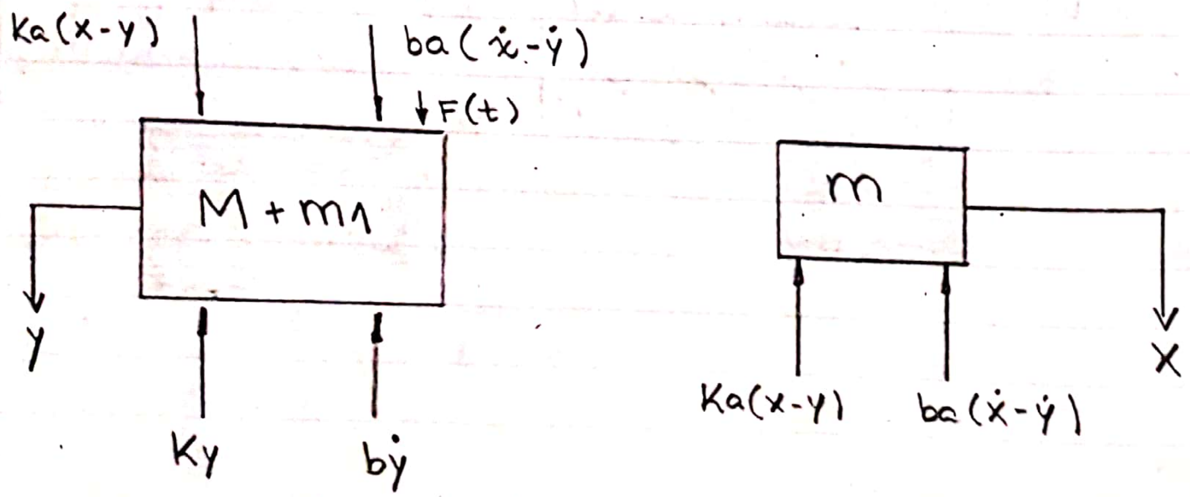
$$\dot{y} = \int \ddot{y}\,dt \qquad y = \int\left(\int \ddot{y}\,dt\right)dt$$

Logo obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = m\ddot{y} + b\int \ddot{y}\,dt + K\int\left(\int \ddot{y}\,dt\right)dt}$$

2) Máquina rotativa com absorvedor de vibração

Diagrama de Corpo Livre



Portanto é possível escrever as 2 equações diferenciais desse sistema

Para o corpo de massa $M+m$ ficamos com:

$$\boxed{(M+m_1)\ddot{y} + (b+b_a)\dot{y} + (K+K_a)y = F(t) + b_a\dot{x} + K_a x}$$

Para o corpo de massa m obtemos a seguinte expressão:

$$\boxed{m\ddot{x} + b_a\dot{x} + K_a x = b_a\dot{y} + K_a y}$$

3) Carrinho de Transporte

Esboço do Problema

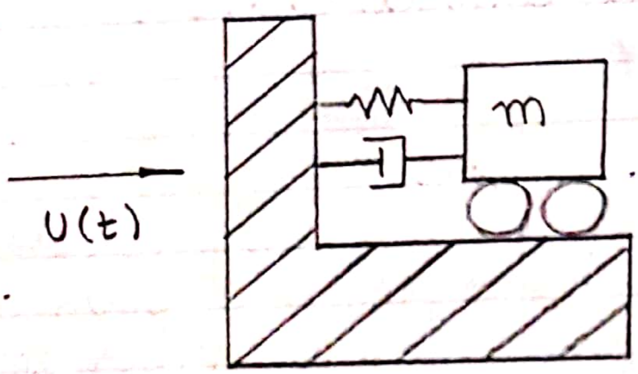
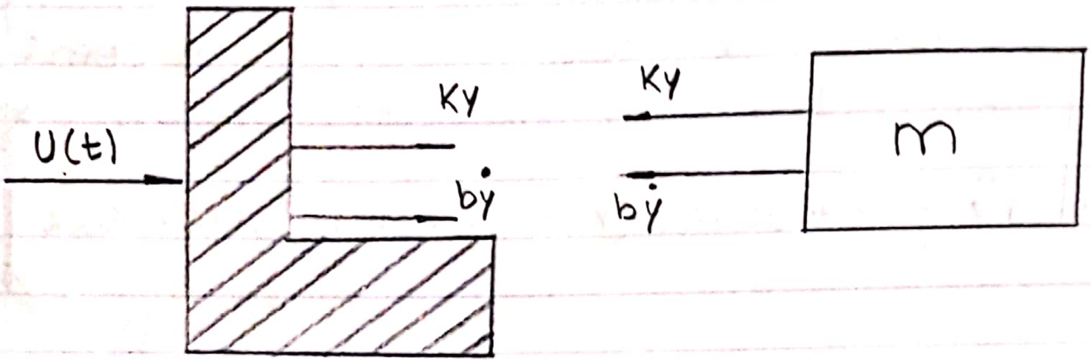


Diagrama de Corpo Livre



Por conseguinte realiza-se o Teorema do movimento do baricentro para ambos os corpos

Para o bloco de massa m:

$$\boxed{-m\ddot{z} = m\ddot{y} + Ky + b\dot{y}} \qquad (\mathrm{I})$$

Para a carreta obtemos: (II)

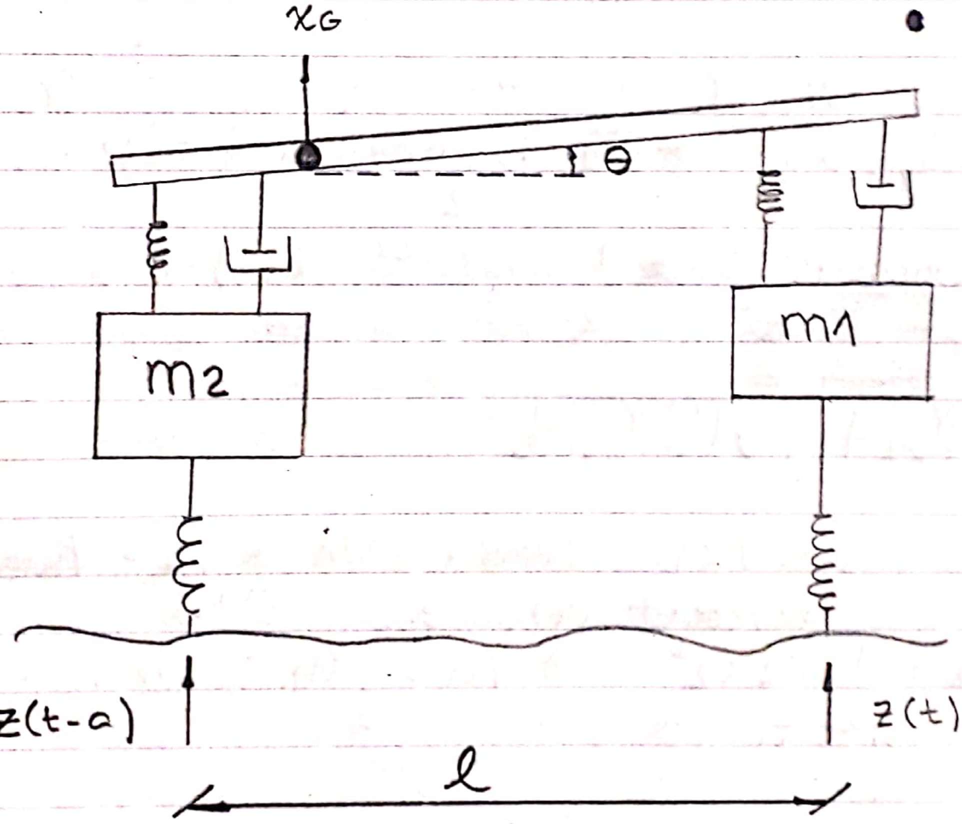
$$\boxed{M\ddot{z} = u + Ky + b\dot{y}}$$

3.1) Admitindo que a massa da carreta é desprezível frente a massa do bloco podemos somar a equação (I) e (II) supracitadas considerando $M = 0$, de forma a obter a seguinte equação diferencial:

$$\boxed{m(\ddot{z} + \ddot{y}) = u}$$

3.2) Admitir que a massa da carreta não seja desprezível já foi demonstrado no item 3

4) "1/2 carro para movimentos verticais usando a equação de Lagrange: carro avança com velocidade $v(t)$, $z(t)$ é o deslocamento devido ao perfil da via (calcular α), l distância entre os pontos de contato dos pneus com o solo"



Calculo de α

$$l = \int_{t-\alpha}^{t} v(t)\,dt \qquad \boxed{\alpha = \frac{l}{v}}$$

Por Lagrange precisamos obter primeiramente os valores de T (energia cinético), V (energia potencial) e R (dissipação de Rayleigh).

ENERGIA CINÉTICA

$$T = T_1 + T_2 + T_{BARRA}$$

$$T_{BARRA} = \frac{1}{2} M(v^2 + \dot{x}_G^2) + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (v^2 + \dot{x}_2^2)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (v^2 + \dot{x}_1^2)$$

ENERGIA POTENCIAL

$$V = V_{K2} + V_{K1} + V_{BARRA} + V_1 + V_2 + V_{K1G} + V_{K2G}$$

» $V_{K2} = \frac{1}{2} K_2 x_2^2$ » $V_{K1} = \frac{1}{2} K_1 x_1^2$ » $V_{BARRA} = mg x_G$

» $V_1 = m_1 g x_1$ » $V_2 = m_2 g x_2$ » $V_{K1G} = \frac{1}{2} K_1 (x_G - x_1)^2$

» $V_{K2G} = \frac{1}{2} K_2 (x_G - x_2)^2$

RAYLEIGH

$$R = \frac{1}{2} b_1 (\dot{x}_G - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} b_2 (\dot{x}_G - \dot{x}_2)^2$$

Para encontrar as equações diferenciais deste problema basta substituir T, V e R na fórmula de Lagrange

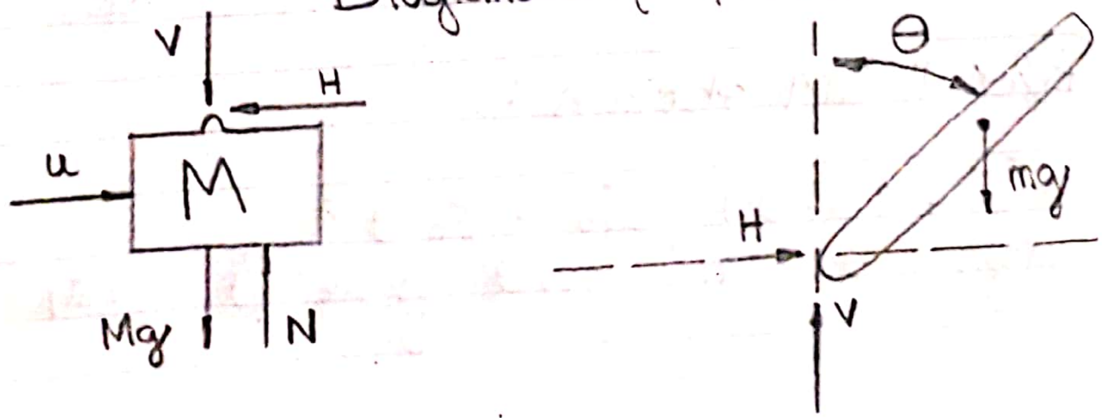
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = 0$$

Basta substituir a coordenada generalizada q por respectivamente: x_G, x_1, x_2 e θ, totalizando 4 equações diferenciais que descreverão o movimento.

5) Pendulo invertido montado em carrinho ("Segway")

a) LEIS DE NEWTON

Diagrama de Corpo Livre



Aplicando a 2ª Lei de Newton para o carrinho e o pendulo, obtemos as seguintes expressões

PÊNDULO

Na direção horizontal temos:

$$m a_G \vec{i} = H \quad (III)$$

A aceleração $\vec{a}_G$ pode ser descrita como:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)] \quad (IV)$$

Rearranjando a equação (IV) para o problema em questão obtêm-se:

$$\vec{a}_G = \ddot{x}\vec{i} - \ddot{\theta}\vec{k} \wedge l(\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) - \dot{\theta}\vec{k} \wedge [-\dot{\theta}\vec{k} \wedge l(\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})]$$

$$\begin{cases} a_G\vec{i} = (\ddot{x} + l\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta) & (V) \\ a_G\vec{j} = (-l\dot{\theta}\cos\theta - l\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta) & (VI) \end{cases}$$

Substituindo a expressão (V) na equação (III) obtêm-se:

$$m(\ddot{x} + l\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta) = H \quad (VII)$$

Pelo TMQM obtemos:

$$\vec{M}_0 = (G-O) \wedge \vec{a}_{P0} + J_0\ddot{\theta}\vec{k}$$

$$-\cancel{m}gl\operatorname{sen}\theta = -\cancel{m}\ddot{x}l\cos\theta - \frac{4}{3}\cancel{m}l^2 \cdot \ddot{\theta} \quad (VIII)$$

CARRINHO

Direção $\vec{i}$

$$u - H = M\ddot{x} \qquad (IX)$$

Por fim substituindo (IX) em (VIII):

$$M\ddot{x} = u - m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta)$$
$$M\ddot{x} + m\ddot{x} = u - ml(\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)$$

Portanto as equações diferenciais que definem o movimento do Pendulo invertido em carrinho são:

$$\begin{cases} \frac{4}{3} l\ddot{\theta} - g\operatorname{sen}\theta = -\ddot{x}\cos\theta \\ (M+m)\ddot{x} = u - ml(\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta) \end{cases}$$

b) LAGRANGE

Sendo $(G-O) = l(\cos\theta\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{i})$

Da mesma forma que foi feito no exercício 4, é necessário descobrir T (energia cinética) e V (energia cinético) sendo que neste caso haverá presença de força externo (u)

ENERGIA CINÉTICA

$$T = T_{BARRA} + T_{CARRO}$$

$$T_{BARRA} = \frac{1}{2} m \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \frac{4}{3} m l^2 + m \dot{x} \hat{i} \cdot [(-\dot{\theta}\hat{k}) \times l (\cos\theta \hat{j} + \sin\theta \hat{i}]$$

$$T_{BARRA} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{\theta} l \cos\theta + \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$T_{CARRO} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{\theta} l \cos\theta + \frac{2}{3} m l^2 (\dot{\theta})^2$$

ENERGIA POTENCIAL

$$V = V_{BARRA} = mgl \cos\theta$$

Aplicando T e V na forma de Lagrange tendo x como coordenada generalizada obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{T-V}{\dot{x}}\right) - \frac{\partial T-V}{\partial x} = u$$

$$\boxed{(M+m)\ddot{x} = u - ml(\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta)}$$

Aplicando T e V da mesma forma, entretanto tendo Θ como coordenada generalizada obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T-V}{\partial \dot{\Theta}}\right) - \frac{\partial T-V}{\partial \Theta} = u$$

$$\boxed{\frac{4}{3} l\ddot{\Theta} - g\,\mathrm{sen}\Theta = -\ddot{x}\cos\Theta}$$