PME3380 - Exercícios 27/08

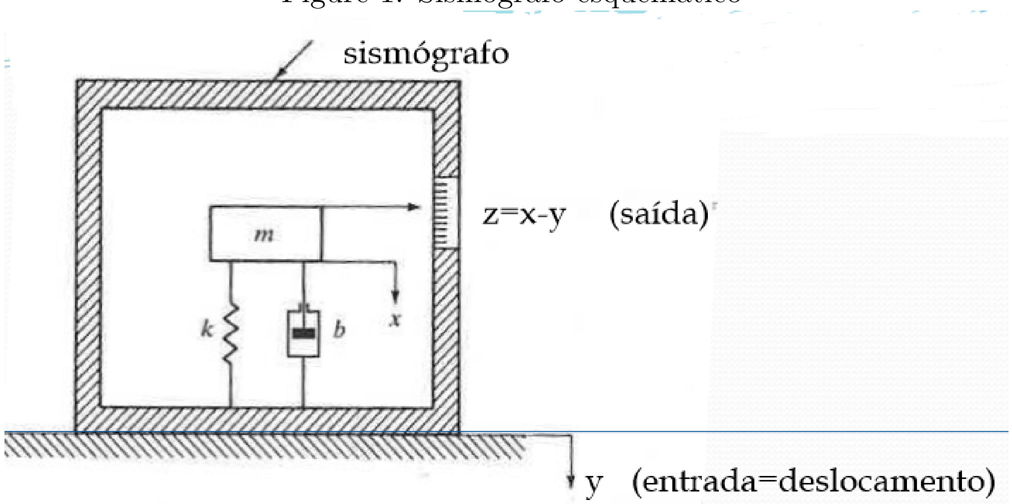
Enzo Zugliani

September 1, 2020

Resolução dos exercícios de sistemas mecânicos presentes no final dos slides dados em aula. Em todos os equacionamentos, o sistema é admitido perturbado em torno do equilíbrio, de modo que os termos de força peso não são considerados.

Exercício 1.a - Sismógrafo

Figure 1: Sismógrafo-esquemático



Define-se $x > y$, $\dot{x} > \dot{y}$. As forças elástica e viscosa podem ser definidas como:

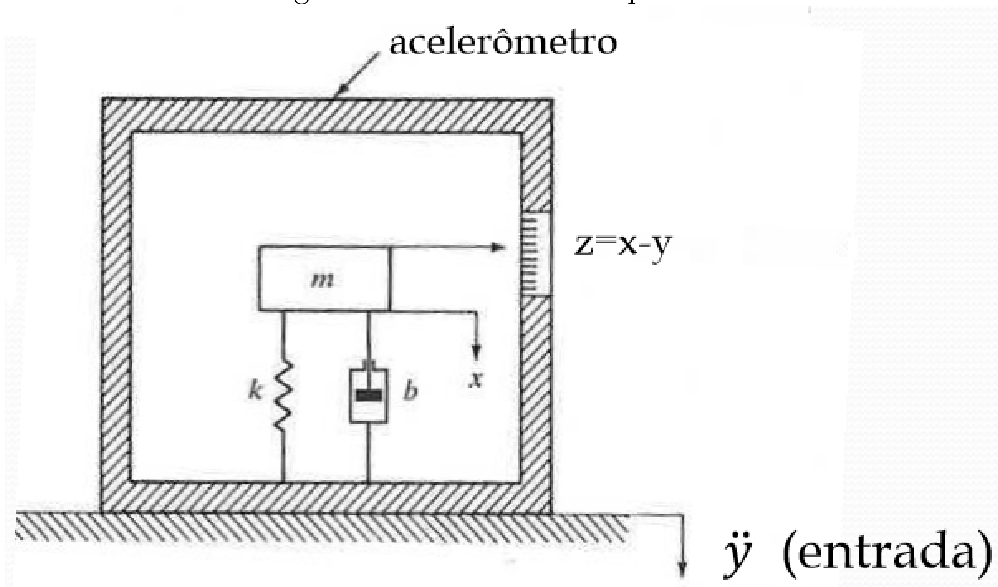
$$F_k = k(x - y)$$
$$F_b = b(\dot{x} - \dot{y})$$

Pode-se escrever então a segunda lei de newton para a massa suspensa:

$$m\ddot{x} = -F_k - F_b \Rightarrow$$
$$m\ddot{x} = -k(x - y) - b(\dot{x} - \dot{y}) \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{y} + ky}$$

Exercício 1.b - Acelerômetro

Figure 2: Acelerômetro-esquemático



O equacionamento para o acelerômetro é muito semelhante ao do sismógrafo, porém considera-se :

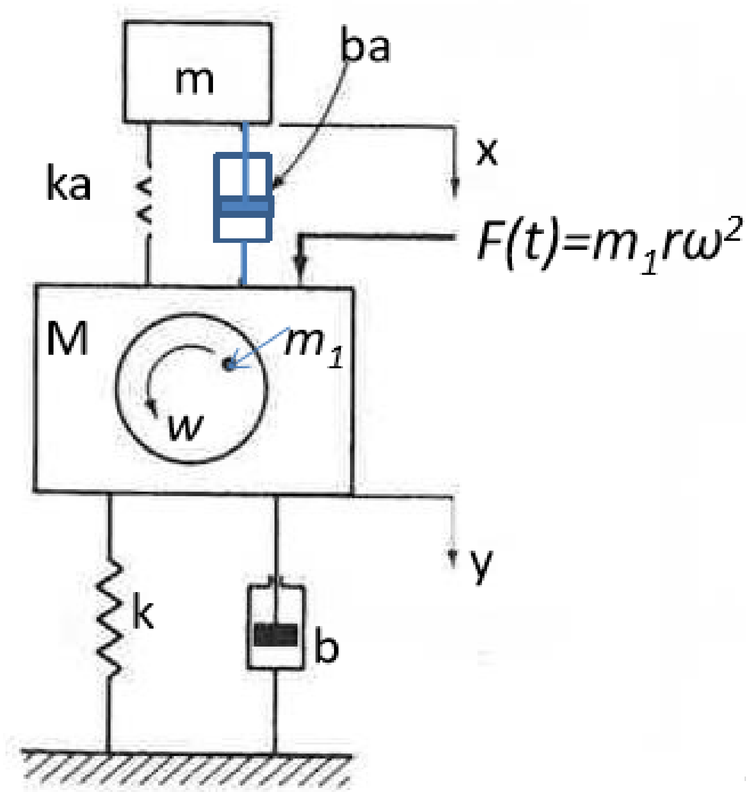
$$z = x - y \qquad \dot{z} = \dot{x} - \dot{y} \qquad \ddot{z} = \ddot{x} - \ddot{y}$$

E portanto pode-se escrever a segunda lei em termos de z e $\ddot{y}$:

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - b(\dot{x}-\dot{y}) \Rightarrow$$
$$m(\ddot{z}+\ddot{y}) = -kz - b\dot{z} \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = -\ddot{y}}$$

Exercício 2 - Máquina rotativa

Figure 3: Máquina rotativa-esquemático



Com $x > y$, $\dot{x} > \dot{y}$, e considerando os termos com subscrito 1 referentes à massa superior e 2 referentes à inferior, as forças são:

$$F_{k1} = k_a(x - y)$$
$$F_{b1} = b_a(\dot{x} - \dot{y})$$
$$F_{k2} = ky$$
$$F_{b2} = b\dot{y}$$
$$F(t) = m_1 r\omega^2$$

A segunda lei de newton para a massa superior pode ser escrita:

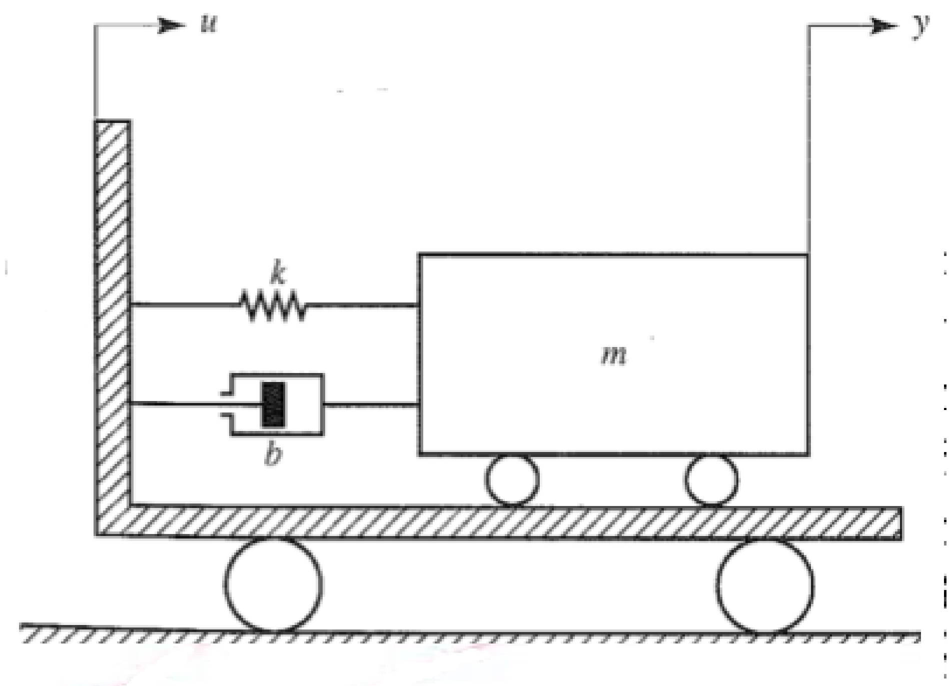
$$m\ddot{x} = -F_{k1} - F_{b1} \Rightarrow$$
$$m\ddot{x} = -k_a(x - y) - b_a(\dot{x} - \dot{y}) \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{m\ddot{x} + b_a\dot{x} + k_a x = b_a\dot{y} + k_a y}$$

Para a massa inferior, pode-se escrever

$$M\ddot{x} = F_{k1} + F_{b1} - F_{k2} - F_{b2} + F(t) \Rightarrow$$
$$M\ddot{x} = k_a(x - y) + b_a(\dot{x} - \dot{y}) - ky - b\dot{y} + F(t) \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{M\ddot{y} + (b_a + b)\dot{y} + (k_a + k)y = b_a\dot{x} + k_a x + m_1 r\omega^2}$$

Exercício 3.a - Carrinho de transporte (massa desprezível)

Figure 4: Carrinho de transporte-esquemático



Se a massa da carreta é desprezível, a força u é transferida imediatamente para a massa m, de modo que o sistema pode ser descrito simplesmente por:

$$\boldsymbol{m\ddot{y} = u}$$

Exercício 3.b - Carrinho de transporte (massa M considerada)

Define-se a coordenada horizontal do carrinho como x, e $x > y$, $\dot{x} > \dot{y}$. As forças elástica e viscosa são:

$$F_k = k(x - y)$$
$$F_b = b(\dot{x} - \dot{y})$$

Escrevendo a segunda lei de Newton para a massa transportada:

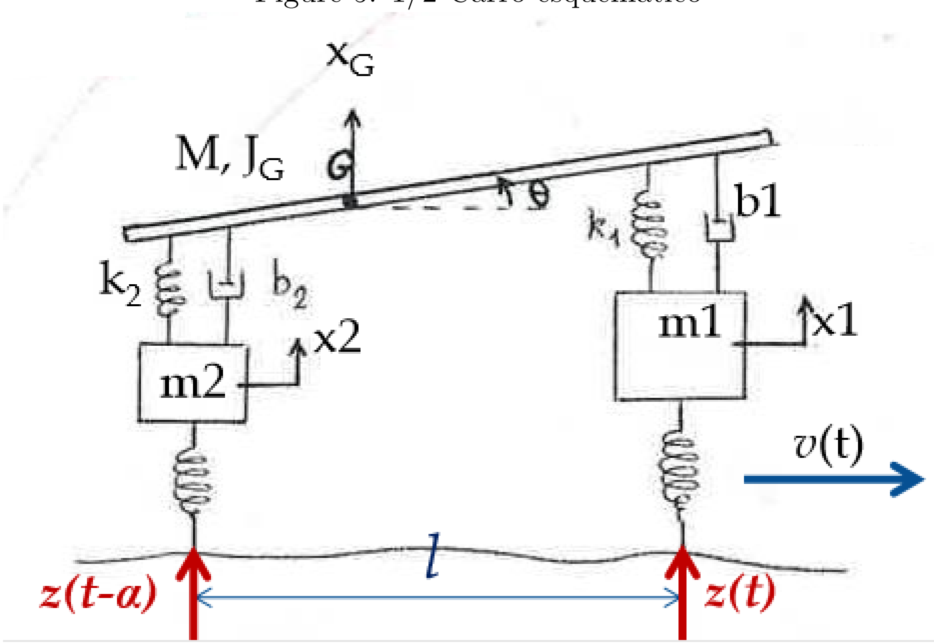
$$m\ddot{y} = F_k + F_b \Rightarrow$$
$$m\ddot{y} = k_(x - y) + b_(\dot{x} - \dot{y}) \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{x} + kx}$$

Do mesmo modo, para a carreta:

$$M\ddot{x} = u - F_k - F_b \Rightarrow$$
$$M\ddot{x} = u - k_(x - y) - b_(\dot{x} - \dot{y}) \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{y} + ky + u}$$

Exercício 4.a - 1/2 Carro com Lagrange

Figure 5: 1/2 Carro-esquemático



Definiu-se a como a distância entre a extremidade esquerda do chassis e seu centro de gravidade e x_a como o deslocamento vertical de tal extremidade. E b como a distância do centro de gravidade até a extremidade direita e x_b como seu deslocamento vertical. Temos as seguintes restrições cinemáticas:

$$x_G = x_a + asin(\theta)$$
$$\dot{x_G} = \dot{x_a} + acos(\theta)\dot{\theta}$$
$$x_b = x_G + bsin(\theta)$$
$$\dot{x_b} = \dot{x_G} + bcos(\theta)\dot{\theta}$$

A energia cinética total T, energia potencial total V, dissipação total R e função de Lagrange L = T - V podem então ser escritas:

$$T = \frac{m_1\dot{x_1}^2}{2} + \frac{m_2\dot{x_2}^2}{2} + \frac{M\dot{x_G}^2}{2} + \frac{J\dot{\theta}^2}{2}$$
$$V = \frac{k(x_1 - z_1)^2}{2} + \frac{k(x_2 - z_2)^2}{2} + \frac{k_1(x_1 - x_b)^2}{2} + \frac{k_2(x_2 - x_a)^2}{2}$$
$$R = \frac{b_1(\dot{x_1} - \dot{x_b})^2}{2} + \frac{b_2(\dot{x_2} - \dot{x_a})^2}{2}$$
$$L = \frac{m_1\dot{x_1}^2}{2} + \frac{m_2\dot{x_2}^2}{2} + \frac{M\dot{x_G}^2}{2} + \frac{J\dot{\theta}^2}{2} - \frac{k(x_1 - z_1)^2}{2} - \frac{k(x_2 - z_2)^2}{2} - \frac{k_1(x_1 - x_b)^2}{2} - \frac{k_2(x_2 - x_a)^2}{2}$$

Para a coordenada generalizada x_1, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - z_1) - k_1(x_1 - x_b)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}} = m_1\dot{x_1}$$
$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x_1}} = b_1(\dot{x_1} - \dot{x_b})$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}) = m_1\ddot{x_1}$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x_1}} =$$
$$m_1\ddot{x_1} + k(x_1 - z_1) + k_1(x_1 - x_b) + b_1(\dot{x_1} - \dot{x_b}) = 0 \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{m_1\ddot{x_1} + b_1\dot{x_1} + (k + k_1)x_1 = b_1(\dot{x_G} + bcos(\theta)\dot{\theta}) + k_1(x_G + bsin(\theta)) + kz(t)}$$

Para x_2, escreve-se:

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - z_2) - k_2(x_2 - x_a)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}} = m_2\dot{x_2}$$
$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x_2}} = b_2(\dot{x_2} - \dot{x_a})$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}) = m_2\ddot{x_2}$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x_2}} =$$
$$m_2\ddot{x_2} + k(x_2 - z_2) + k_2(x_2 - x_a) + b_2(\dot{x_2} - \dot{x_a}) = 0 \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{m_2\ddot{x_2} + b_2\dot{x_2} + (k + k_2)x_2 = b_2(\dot{x_G} - acos(\theta)\dot{\theta}) + k_2(x_G - asin(\theta)) + kz(t + l/v)}$$

Para x_G:

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = k_1(x_1 - x_b) + k_2(x_2 - x_a)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x_G}} = M\dot{x_G}$$
$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x_G}} = -b_1(\dot{x_1} - \dot{x_b}) - b_2(\dot{x_2} - \dot{x_a})$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_G}}) = M\ddot{x_G}$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_G}}) - \frac{\partial L}{\partial x_G} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x_G}} =$$
$$M\ddot{x_G} - k_1(x_1 - x_b) - k_2(x_2 - x_a) - b_1(\dot{x_1} - \dot{x_b}) - b_2(\dot{x_2} - \dot{x_a}) = 0 \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{M\ddot{x_G} + (b_1 + b_2)\dot{x_G} + (k_1 + k_2)x_G = b_1(\dot{x_1} - bcos(\theta)\dot{\theta}) + b_2(\dot{x_2} + acos(\theta)\dot{\theta}) +}$$
$$\boldsymbol{+ k_1(x_1 - bsin(\theta) + k_2(x_2 + asin(\theta))}$$

Finalmente, para θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k_1(x_1 - b_1)bcos(\theta) + k_2(x_2 - x_a)acos(\theta)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta}$$
$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = -b_1(\dot{x_1} - \dot{x_b})bcos(\theta) + b_2(\dot{x_2} - \dot{x_a})acos(\theta)$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) = J\ddot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} =$$
$$J\ddot{\theta} - k_1(x_1 - x_b)bcos(\theta) + k_2(x_2 - x_a)acos(\theta) - b_1(\dot{x_1} - \dot{x_b})bcos(\theta) + b_2(\dot{x_2} - \dot{x_a})acos(\theta) = 0 \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{J\ddot{\theta} - k_1 bcos(\theta)(x_1 - x_G - bsin(\theta)) + k_2 acos(\theta)(x_2 - x_G + asin(\theta))}$$
$$\boldsymbol{-b_1 bcos(\theta)(\dot{x_1} - \dot{x_G} - bcos(\theta)\dot{\theta}) + b_2 acos(\theta)(\dot{x_2} - \dot{x_G} + acos(\theta)\dot{\theta})} = 0$$

Exercício 4.b - 1/2 Carro com Lagrange (ângulos pequenos)

Para ângulos pequenos, pode-se realizar as aproximações:

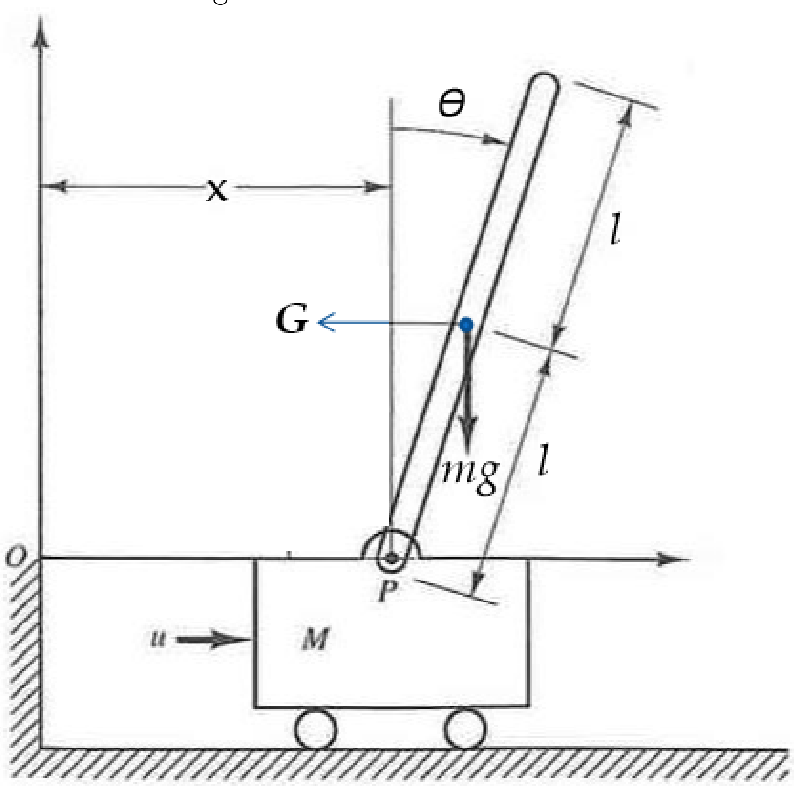
$$sin(\theta) \approx \theta$$
$$cos(\theta) \approx 1$$

Assim, as equações diferenciais que regem o sistema podem ser escritas:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + (k+k_1)x_1 = b_1(\dot{x}_G + b\dot{\theta}) + k_1(x_G + b\theta) + kz(t)} \\
\boldsymbol{m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + (k+k_2)x_2 = b_2(\dot{x}_G - a\dot{\theta}) + k_2(x_G - a\theta) + kz(t + l/v)} \\
\boldsymbol{M\ddot{x}_G + (b_1+b_2)\dot{x}_G + (k_1+k_2)x_G} = \boldsymbol{b_1(\dot{x}_1 - b\dot{\theta}) + b_2(\dot{x}_2 + a\dot{\theta}) +} \\
\boldsymbol{+k_1(x_1 - b\theta + k_2(x_2 + a\theta))} \\
\boldsymbol{J\ddot{\theta} - k_1 b(x_1 - x_G - b\theta) + k_2 a(x_2 - x_G + a\theta)} \\
\boldsymbol{-b_1 b(\dot{x}_1 - \dot{x}_G - b\dot{\theta}) + b_2 a(\dot{x}_2 - \dot{x}_G + a\dot{\theta})} = 0
\end{aligned}
$$

Exercício 5.a - Pêndulo invertido em carrinho (Newton)

Figure 6: Pêndulo em carrinho



Define-se a posição do centro de massa do pêndulo como (x_G, y_G) e as reações na junta P como R_x e R_y. É possível escrever então a segunda lei de Newton aplicada ao carrinho(ao longo de x):

$$M\ddot{x} = -R_x + u$$

Pode-se também escrever a segunda lei ao longo de x e y, e o TMA aplicado ao pêndulo levando em conta que o polo P tem aceleração não nula:

$$m\ddot{x_G} = R_x$$
$$m\ddot{y_G} = R_y - P$$
$$J\ddot{\theta} = lmgsin(\theta) - (P - G) \times a_P$$

Calculando-se o produto vetorial:

$$(P - G) \times A_p = y_g \ddot{x}$$

Eliminando R_x das equações realizando as substituições necessárias, obtêm-se o sistema:

$$M\ddot{x} + m\ddot{x_G} = u$$
$$J\ddot{\theta} = lmgsin(\theta) - y_g \ddot{x}$$

As relações cinemáticas entre pêndulo e carrinho podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
x_G &= x + lsin(\theta) \\
\dot{x_G} &= \dot{x} + lcos(\theta)\dot{\theta} \\
\ddot{x_G} &= \ddot{x} + l(-sin(\theta)\dot{\theta}^2 + cos(\theta)\ddot{\theta}) \\
y_G &= lcos(\theta) \\
\dot{y_G} &= -lsin(\theta)\dot{\theta}
\end{aligned}$$

Substituindo adequadamente, encontra-se as equações do movimento do pêndulo:

$$\boldsymbol{(M + m)\ddot{x} + mlcos(\theta)\ddot{\theta} - mlsin(\theta)\dot{\theta}^2 = u}$$
$$\boldsymbol{J\ddot{\theta} = mglsin(\theta) - mlcos(\theta)\ddot{x}}$$

Exercício 5.b - Pêndulo invertido em carrinho (Lagrange)

A energia cinética total T e energia potencial total V podem ser escritas:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m(\dot{x_G}^2 + \dot{y_G}^2)}{2} + \frac{J'\dot{\theta}^2}{2} \\
V &= mgy_G
\end{aligned}$$

Onde J' é o momento de inércia em relação ao centro de massa, que pode ser relacionado ao momento referente ao polo P pelo teorema de eixos paralelos. Realizando as substituições adequadas e aplicando as restrições cinemáticas, calcula-se o lagrangiano da função:

$$L = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}lcos(\theta)) + \frac{J\dot{\theta}^2}{2} - mglcos(\theta)$$

Para a coordenada generalizada x, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + mlcos(\theta)\dot{\theta})$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml(-sin(\theta)\dot{\theta}^2 + cos(\theta)\ddot{\theta})$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} =$$
$$\boldsymbol{(M+m)\ddot{x} + mlcos(\theta)\ddot{\theta} - mlsin(\theta)\dot{\theta}^2 = u}$$

Para a coordenada generalizada θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{x}sin(\theta) + mglsin(\theta)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml\dot{x}cos(\theta) + J\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) = ml\ddot{x}cos(\theta) - ml\dot{x}sin(\theta)\dot{\theta} + J\ddot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} =$$
$$\boldsymbol{J\ddot{\theta} = mglsin(\theta) - mlcos(\theta)\ddot{x}}$$