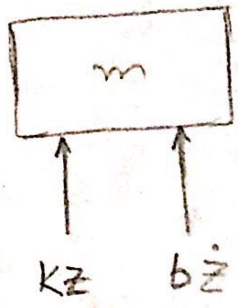
Lucas Souza Vieira Nº USP: 10772863

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exercício da aula de 27/08 - Sistemas mecânicos

① a) Diagrama de corpo livre



$$z = x - y$$

$$\dot{z} = \dot{x} - \dot{y}$$

Escrevendo o teorema do movimento do baricentro:

$$m(\ddot{x} - \ddot{y}) = -k(x-y) - b(\dot{x} - \dot{y})$$

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = m\ddot{y} + b\dot{y} + ky}$$

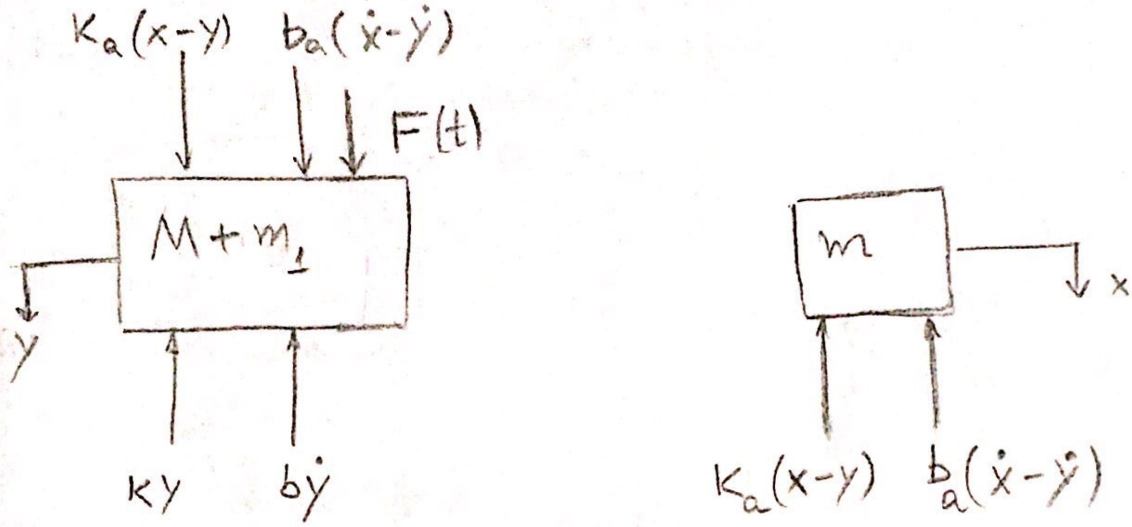
b) A equação diferencial para o acelerômetro é obtida da mesma forma que no item anterior. Contudo, como a entrada é $\ddot{y}$, obtemos $\dot{y}$ e y segundo:

$$\dot{y} = \int \ddot{y}\,dt \quad ; \quad y = \int\left(\int \ddot{y}\,dt\right)dt$$

Reescrevemos a equação diferencial final:

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = m\ddot{y} + b\int \ddot{y}\,dt + k\int\left(\int \ddot{y}\,dt\right)dt}$$

② Assumindo a hipótese de movimento apenas na vertical, desenhamos o diagrama de corpo livre de cada corpo, considerando a massa m_1 desprezível frente a M:



Escrevemos a 2ª lei de Newton para cada corpo.

Para o corpo de massa $M+m_1$:

$$(M+m_1)\ddot{y} = K_a(x-y) + b_a(\dot{x}-\dot{y}) + F(t) - ky - b\dot{y}$$

$$(M+m_1)\ddot{y} + (b+b_a)\dot{y} + (k+K_a)y = F(t) + b_a\dot{x} + K_a x$$

Para o corpo de massa m:

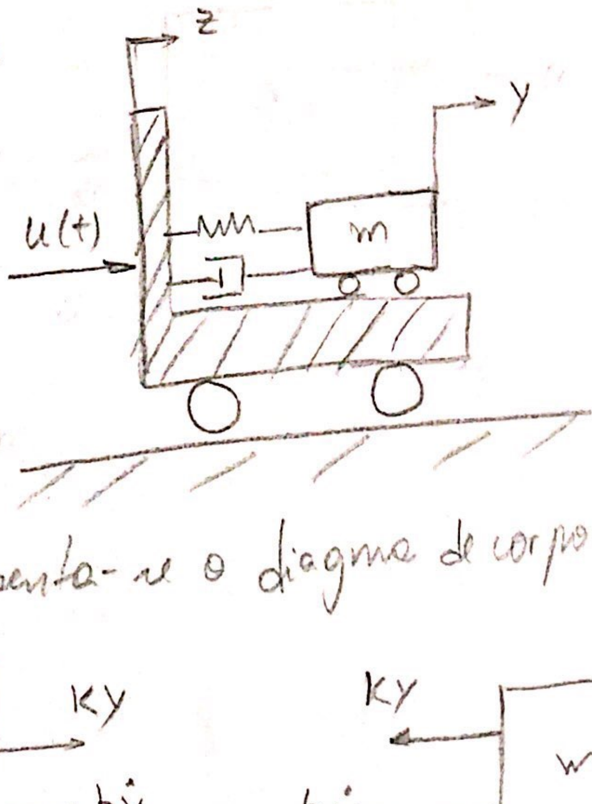
$$m\ddot{x} = -K_a(x-y) - b_a(\dot{x}-\dot{y})$$

$$m\ddot{x} + b_a\dot{x} + K_a x = b_a\dot{y} + K_a y$$

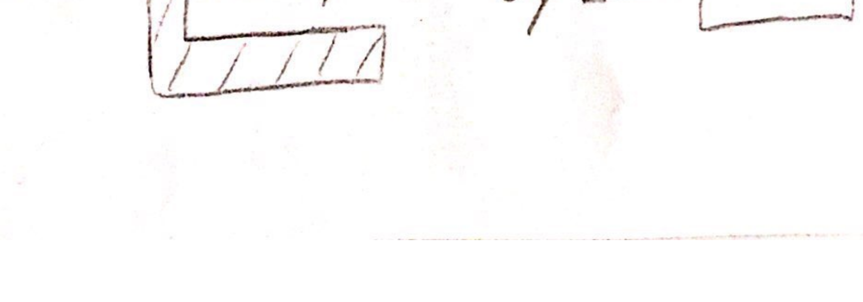
Tomando $F(t) = m_1 \omega^2 r$, escrevemos o sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\boxed{\begin{cases} (M+m_1)\ddot{y} + (b+b_a)\dot{y} + (k+k_a)y = m_1\omega^2 r + b_a\dot{x} + k_a x \\ m\ddot{x} + b_a\dot{x} + k_a x = b_a\dot{y} + k_a y \end{cases}}$$

3) 3.2) Para o caso mais geral, em que a massa da carreta não pode ser desprezada, temos um sistema com 2 graus de liberdade. Seja z a posição absoluta da carreta:



Representa-se o diagrama de corpo livre dos dois corpos:



Teorema do movimento do baricentro para a carreta:

$$M\ddot{z} = u + ky + b\dot{y}$$

Para o bloco:

$$m(\ddot{z} + \ddot{y}) = -ky - b\dot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky + b\dot{y} = -m\ddot{z}$$

Obtém-se então o seguinte sistema de equações acopladas:

$$\boxed{\begin{cases} M\ddot{z} = u + ky + b\dot{y} \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = -m\ddot{z} \end{cases}}$$

3.1) Somando as duas equações do sistema acoplado:

$$(m+M)\ddot{z} + m\ddot{y} = u$$

Desprezando M frente a m, temos a equação:

$$\boxed{m(\ddot{z} + \ddot{y}) = u}$$

④ a) Hipótese: molas da suspensão com rigidez k (não foi dado).

Determinação de α:

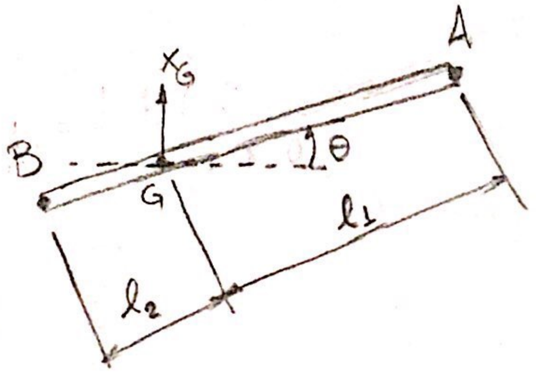
$$l = \int_{t-\alpha}^{t} v(t)\,dt \Rightarrow \text{Como } v(t) = cte \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{l}{v}}$$

Energia cinética e potencial das massas e molas da suspensão:

$$T_{susp} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$V_{susp} = \frac{1}{2} k\left(x_1 - z(t)\right)^2 + \frac{1}{2} k\left(x_2 - z(t-\alpha)\right)^2$$

Para o restante da estrutura:



$$l_1 + l_2 = l$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \dot{\theta}\vec{k} \wedge (A-G) = \dot{x}_G \vec{j} + \dot{\theta}\vec{k} \wedge l_1(\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j})$$

$$\vec{V}_A = \dot{x}_G \vec{j} + l_1\dot{\theta}(-\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_G + \dot{\theta}\vec{k} \wedge (B-G) = \dot{x}_G \vec{j} + \dot{\theta}\vec{k} \wedge l_2(-\cos\theta\vec{i} - \operatorname{sen}\theta\vec{j})$$

$$\vec{V}_B = \dot{x}_G \vec{j} + l_2\dot{\theta}(\operatorname{sen}\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j})$$

Para o cálculo da dissipação nos amortecedores só nos interessa a componente vertical das velocidades $\vec{V}_A$ e $\vec{V}_B$.

Para energia potencial das molas k_1 e k_2, também só interessa o deslocamento vertical de A e B.

Dissipação dos amortecedores:

$$R = \frac{1}{2} b_1 (\dot{x}_G + l_1 \dot{\theta} \cos\theta - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} b_2 (\dot{x}_G - l_2 \dot{\theta} \cos\theta - \dot{x}_2)^2$$

Energia cinética e potencial do chassi e das molas de rigidez k_1 e k_2 a ele acoplados:

$$T_{chassi} = \frac{1}{2} M \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2$$

$$V_{chass.} = \frac{1}{2} K_1 (x_G + l_1 \operatorname{sen}\theta - x_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_G - l_2 \operatorname{sen}\theta - x_2)^2$$

Energia cinética e potencial do sistema:

$$\left.\begin{aligned} T &= T_{susp} + T_{chassi} \\ V &= V_{susp} + V_{chassi} \end{aligned}\right\} \quad L = T - V$$

Escrevendo as derivadas e equações para cada variável do sistema:

Para x_1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - z(t)) + K_1 (x_G + l_1 \operatorname{sen}\theta - x_1)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = -b_1 (\dot{x}_G + l_1 \dot{\theta} \cos\theta - \dot{x}_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x}_1 + K(x_1 - z(t)) - k_1(x_G + l_1 \operatorname{sen}\theta - x_1) + \\ - b_1 (\dot{x}_G + l_1 \dot{\theta} \cos\theta - \dot{x}_1) = 0$$

Para x_2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - z(t-\alpha)) + k_2(x_G - l_2 \operatorname{sen}\theta - x_2)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = -b_2(\dot{x}_G - l_2 \dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x}_2 + k(x_2 - z(t-\alpha)) - k_2(x_G - l_2 \operatorname{sen}\theta - x_2) +$$
$$-b_2(\dot{x}_G - l_2\dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}_2) = 0$$

Para $\dot{x}_G$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} = M\dot{x}_G \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G}\right) = M\ddot{x}_G$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = -k_1(x_G + l_1 \operatorname{sen}\theta - x_1) - k_2(x_G - l_2 \operatorname{sen}\theta - x_2)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_G} = b_1(\dot{x}_G + l_1\dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}_1) + b_2(\dot{x}_G - l_2\dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_G} + \frac{\partial R}{\partial x_G} = 0$$

$$M\ddot{x}_G + k_1(x_G + l_1 \operatorname{sen}\theta - x_1) + k_2(x_G - l_2 \operatorname{sen}\theta - x_2) +$$
$$+ b_1(\dot{x}_G + l_1\dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}_1) + b_2(\dot{x}_G - l_2\dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}_2) = 0$$

Para θ:

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}} = J_G \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_G \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k_1 l_1 \cos\theta \left(x_G + l_1 \operatorname{sen}\theta - x_1\right) + k_2 l_2 \cos\theta \left(x_G - l_2 \operatorname{sen}\theta - x_2\right)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = b_1 l_1 \cos\theta \left(\dot{x}_G + l_1 \dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}_1\right) - b_2 l_2 \cos\theta \left(\dot{x}_G - l_2 \dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$J_G \ddot{\theta} + k_1 l_1 \cos\theta \left(x_G + l_1 \operatorname{sen}\theta - x_1\right) - k_2 l_2 \cos\theta \left(x_G - l_2 \operatorname{sen}\theta - x_2\right) +$$
$$+ b_1 l_1 \cos\theta \left(\dot{x}_G + l_1 \dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}_1\right) - b_2 l_2 \cos\theta \left(\dot{x}_G - l_2 \dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}_2\right) = 0$$

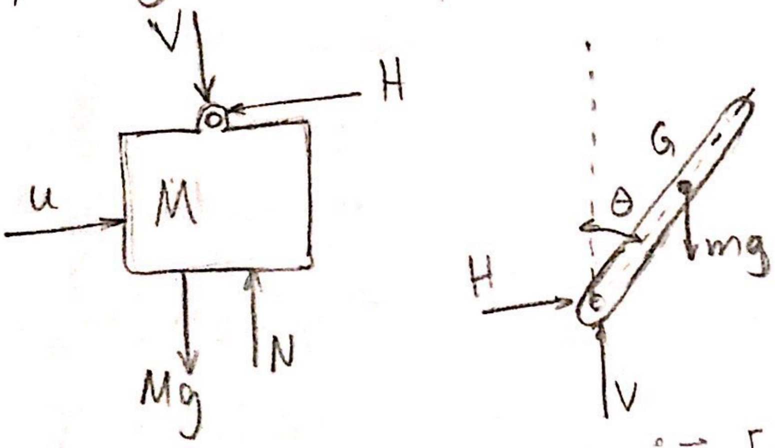
Reescrevendo as quatro equações diferenciais em um sistema acoplado:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + (k + k_1) x_1 = k\, z(t) + k_1\left(x_G + l_1 \operatorname{sen}\theta\right) + b_1\left(\dot{x}_G + l_1 \dot{\theta}\cos\theta\right) \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + (k + k_2) x_2 = k\, z(t-\alpha) + k_2\left(x_G - l_2 \operatorname{sen}\theta\right) + b_2\left(\dot{x}_G - l_2 \dot{\theta}\cos\theta\right) \\ M \ddot{x}_G + (b_1 + b_2)\dot{x}_G + (k_1 + k_2) x_G = k_1 (x_1 - l_1 \operatorname{sen}\theta) + k_2 (x_2 + l_2 \operatorname{sen}\theta) + \\ \qquad + b_1\left(\dot{x}_1 - l_1 \dot{\theta}\cos\theta\right) + b_2\left(\dot{x}_2 + l_2 \dot{\theta}\cos\theta\right) \\ J_G \ddot{\theta} + (b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2)\dot{\theta}\cos^2\theta + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \\ \qquad = \left[k_1 l_1 (x_1 - x_G) + k_2 l_2 (x_G - x_2) + b_1 l_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_G) + b_2 l_2 (\dot{x}_G - \dot{x}_2)\right]\cos\theta \end{cases}$$

b) Admitindo pequenos movimentos, θ é um ângulo pequeno. Podemos aproximar $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$. O sistema obtido fica:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + (k+k_1)x_1 = kz(t) + k_1(x_G + l_1\theta) + b_1(\dot{x}_G + l_1\dot{\theta}) \\ m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + (k+k_2)x_2 = kz(t-\alpha) + k_2(x_G - l_2\theta) + b_2(\dot{x}_G - l_2\dot{\theta}) \\ M\ddot{x}_G + (b_1+b_2)\dot{x}_G + (k_1+k_2)x_G = k_1(x_1 - l_1\theta) + k_2(x_2 + l_2\theta) + \\ \qquad + b_1(\dot{x}_1 - l_1\dot{\theta}) + b_2(\dot{x}_2 + l_2\dot{\theta}) \\ J_G\ddot{\theta} + (b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2)\dot{\theta} + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\theta = \\ \qquad = k_1 l_1(x_1 - x_G) + k_2 l_2(x_G - x_2) + b_1 l_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_G) + b_2 l_2(\dot{x}_G - \dot{x}_2) \end{cases}$$

(5) a) Diagramas de corpo livre (considerando u como força):



$$\vec{a}_G = \ddot{x}\vec{i} - \ddot{\theta}\vec{k} \wedge l(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) - \dot{\theta}\vec{k} \wedge [-\dot{\theta}\vec{k} \wedge l(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})]$$

$$\vec{a}_G = (\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)\vec{i} + (-l\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{j}$$

2ª lei de Newton na direção horizontal:

Carrinho: $u - H = M\ddot{x}$ (1)

Pêndulo: $H = (\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)m$ (2)

Substituindo (2) em (1):

$$\boxed{(M+m)\ddot{x} = u + ml(\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta - \ddot{\theta}\cos\theta)}$$

Usando o teorema do momento da quantidade de movimento em relação ao polo P para o pêndulo:

$$\vec{M}_P^{ext} = (G-P) \wedge m\vec{a}_P + J_P \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$-mgl \operatorname{sen}\theta = -m\ddot{x}\, l\cos\theta - \frac{4ml^2}{3}\ddot{\theta}$$

Reescrevendo o sistema de equações acopladas

$$\boxed{\begin{cases} (M+m)\ddot{x} = u + ml(\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + \ddot{\theta}\cos\theta) \\ \\ \frac{4}{3}l\ddot{\theta} - g\operatorname{sen}\theta = -\ddot{x}\cos\theta \end{cases}}$$

b) Energia cinética:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_P - \dot{\theta}\vec{k} \wedge (G-P)$$

$$\vec{v}_G = \dot{x}\vec{i} - \dot{\theta}\vec{k} \wedge l(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) = (\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i} - l\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$$

$$\|\vec{v}_G\|^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}\,l\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\|\vec{v}_G\|^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}\,l\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}\,l\cos\theta) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4ml^2}{12}\cdot\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}\,l\cos\theta + \frac{l^2}{3}\dot{\theta}^2\right)$$

Energia potencial:

$$V = mgl\cos\theta$$

Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = T - V \Rightarrow L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{4}{3}l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta\right) - mgl\cos\theta$$

Para a coordenada x:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + m\dot{\theta}l\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{\theta}l\cos\theta - m\dot{\theta}^2 l\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = u \Rightarrow \boxed{(M+m)\ddot{x} = u + ml\left(\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right)}$$

Para a coordenada θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}ml^2\dot{\theta} + m\dot{x}l\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}l\cos\theta - m\dot{x}\dot{\theta}l\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{x}\dot{\theta}l\,\mathrm{sen}\,\theta + mgl\,\mathrm{sen}\,\theta = ml\,\mathrm{sen}\,\theta\,(g - \dot{x}\dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} - mgl\,\mathrm{sen}\,\theta = -m\ddot{x}l\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{4}{3}l\ddot{\theta} - g\,\mathrm{sen}\,\theta = -\ddot{x}\cos\theta}$$