Da abdução de Galileu à análise variacional de Lagrange: um ensaio sobre o problema da Braquistócrona

Bruno Siqueira Eduardo
nº USP: 11223587 - Brunoseduardo2002@usp.br
Professor: Oscar João Abdonur

IF-USP, São Paulo, Brasil

Julho de 2020

"...the three great nations, Germany, England, France, each one of their own to unite with myself in such a beautiful search, all finding the same truth."

— Johann Bernoulli

1. Introdução

Este trabalho foi motivado por buscar entender como o Cálculo Variacional seria desenvolvido se Galileu Galilei tivesse acertado a sua abdução sobre uma versão anterior do problema da braquistócrona, porposto por Johann Bernoulli em 1696. Para isso, foi necessário discutir as consequências que as soluções para esse problema desencadearam e inclusive reverberam até os dias de hoje, como nas atuais teorias da física.

2. A Abdução

Em 1638, Galileu Galilei publicou seu último livro, cujo título era *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* ("Discursos e demonstrações matemáticas em torno de duas novas ciências"), contendo praticamente os últimos trinta anos do seu trabalho desenvolvido na física. Nele também constava o problema de achar qual era a linha reta que, num mesmo plano, ligaria um ponto A a um ponto B sobre uma reta vertical de modo que um corpo qualquer, sob apenas ação da gravidade, partiria de A e chegaria a B no menor tempo possível.

Galileu então concluiu corretamente que tal reta deveria atingir B de maneira a formar um ângulo de 45° com a vertical. Conhecendo o tempo desse percurso, ele em seguida também mostrou que o corpo iria atingir o ponto B num tempo menor se passasse primeiramente por um segmento AC e depois por um CB, onde os pontos A, B e C pertenceriam a um mesmo arco de circunferência.

Por mais que o seu raciocínio estivesse perfeitamente correto até então, ele, diante desses fatos, errou ao inferir que um arco de circunferência seria o caminho em que um corpo, somente sob a ação da gravidade, o percorreria no tempo mínimo. O arco de circunferência é uma opção boa para um tempo de percurso reduzido, porém, não é a melhor!

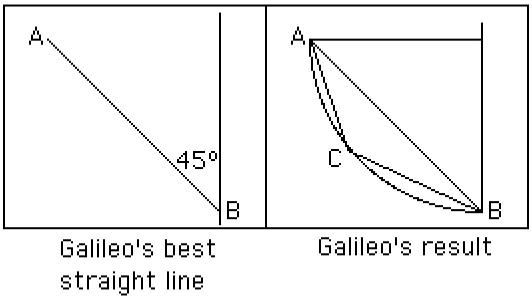

Figura 1: *Ilustração das soluções obtidas por Galileu.*

Vamos agora analisar essa última argumentação de Galileu do ponto de vista da lógica matemática.

O raciocínio abdutivo foi pela primeira vez descrito por Charles Sanders Peirce da seguinte maneira:

O surpreendente fato, C, é observado.
Mas se A for verdadeiro, C seria natural.
Portanto, A é verdadeiro.

[C.S. Peirce 1931-1958, Vol. 5, p. 159]

O "surpreendente fato C"observado por Galileu foi que o corpo em questão partiria do ponto A e chegaria ao ponto B em um tempo reduzido em relação a uma única linha reta se dividisse o seu percurso em dois segmentos, de modo que os pontos que os ligassem pertencessem a um mesmo arco de circunferência. Para o cientista, esse processo de dividir a trajetória em mais segmentos sobre o mesmo arco de circunferência poderia ser feito sucessivamente, obtendo assim um tempo de percuso cada vez mais reduzido[1], até que a trajetória se tornasse um arco de circunferência propriamente dito.

Isso o levou a inferir "A"como verdadeiro, isto é, afirmar que o arco de circunferência seria de fato o caminho que um corpo, somente sob a ação da gravidade, percorreria no tempo mínimo. Tal inferência é *plausível*, pois C é verdadeiro e se A for verdadeiro, A $\rightarrow$ C. No entanto, como veremos mais adiante, A é uma inferência falsa e, por mais que equivocada, essa abdução feita por Galileu fez com que esse problema continuasse em aberto por praticamente mais seis décadas.

3. *Acta Eruditorum*

Depois de 58 anos, o matemático suíço Johann Bernoulli publicou em Junho de 1696 na revista científica mensal alemã *Acta Eruditorum* o seguinte problema que veio então a ser conhecido como o "problema da Braquistócrona":

Dados dois pontos A e B em um plano vertical, qual é a curva traçada por um ponto sob apenas a gravidade, que começa em A e alcança B no tempo mais curto.

Nesse momento, ele já sabia a resposta para o problema, mas mesmo assim queria poder desafiar os outros grandes matemáticos da época e mostrá-los sua curiosa solução.

[1]Essa indução feita por Galileu flertava fortemente com a ideia do que, trinta anos depois, viria a ser chamado de *limite*.

Uma intuição mais imediata nos levaria a acreditar que essa curva pode ser o caminho mais curto que une os pontos A e B, isto é, uma linha reta. Porém, devido às considções iniciais do problema, o caminho mais curto não necessariamente é o mais rápido, sendo então necessário adicionar uma curvatura para baixo. Fazendo isso, adiciona-se comprimento a sua curva, o que eventualmente pode aumentar o tempo do percurso e assim por diante. Esse aparente paradoxo mostra que o problema não é trivial de ser descrito matematicamente.

Voltando ao desafio lançado por Johann, além da sua solução foram apresentadas somente mais quatro na *Acta Eruditorum* de 1697: a do seu irmão Jakob, a de L'Hôpital, a de Leibniz e uma sob anonimato (que foi a de Isaac Newton, como veio a se reconhecer mais tarde). Todos esses matemáticos eram bem jovens na época, com exceção de Newton, que já era um homem de idade e muito respeitado, já pretendendo se aposentar no ramo da matemática. Isso explicaria ele ter solucionado o problema de forma anônima e, mais tarde, revelado a sua motivação para afirmar:

Eu não gosto de ser incomodado e provocado por estrangeiros sobre coisas de matemática...

Leibniz, L'Hôpital e Jakob demoraram mais de seis meses para resolver o problema, Johann resolveu em duas semanas e Newton precisou apenas de uma madrugada.

4. Solução de Johann Brenoulli

Johann Bernoulli idealizou uma outra versão do problema, questionando qual o caminho que a luz faria sob essas condições. Ele se baseou nos estudos de Fermat de 1662, que afirma que todos os fenômenos da óptica geométrica poderem ser explicados através do Princípio do Tempo Mínimo de Fermat: *Se um raio de luz viaja do ponto A ao B, ele o faz pelo percurso mais rápido* (e não necessariamente o mais curto). Em vez de uma partícula deslizando na curva, ele então considerou um raio de luz viajando por vários meios de diferentes, cada um com um índice de refração absoluta, ao passo que a sua velocidade se alteraria igualmente a de uma partícula sob ação da gravidade uniforme. Notemos que essa premissa é completamente diferente de considerar a influência da gravidade sobre o fóton de luz.

Em ambos os cenários há a conservação de energia mecânica. No cenário original, o corpo é influenciado somente pela força peso, que é conservativa, e com base nos estudos de Christiaan Huygens apresentados em 1690 no livro *Traité de la lumière* ("Tratado sobre a Luz"), quando a luz passa de um meio para o outro, ela não altera a sua frequência a não ser que se altere a fonte, logo, a energia também é conservada.

Essas ideias foram associadas aos estudos de Galileu, que afirmou que em qualquer ponto da curva, a velocidade da partícula vai ser proporcional à raiz quadrada da distância vertical entre ela e o ponto de partida. Pela analogia com a óptica, a Lei de Snell-Descartes também se tornou partícipe na solução, pois ela garante que a velocidade da partícula dividido pelo seno do ângulo que a reta tangente da curva nesse ponto faz com a vertical será sempre constante.

Sendo y a distância vertical entre a partícula num dado ponto do percurso o ponto de partida e θ o ângulo que a reta tangente da curva nesse ponto faz com a vertical, Johann chegou na seguinte relação:

$$\frac{sin\,\theta}{\sqrt{y}} = const.$$

que ele prontamente reconheceu como a equação diferencial cuja solução é uma cicloide.

Naquela época, já se tinha conhecimento de que a cicloide era gerada por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta. Para visualizar esse resultado, basta substituir y e θ corretamente na circunferência que gerou a cilóide:

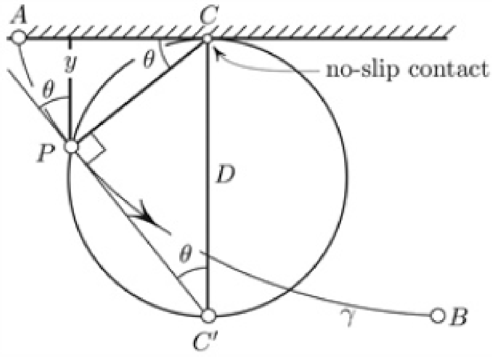

Figura 2: *Ilustração da circunfrência que poderia gerar a cicloide.*

Como $\overline{CP} = D\,sin\,\theta$ e $y = \overline{CP}\,sin\,\theta$, então, de fato $\dfrac{sin\,\theta}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{\sqrt{D}} = const.$.

5. Solução de Jakob Brenoulli

Assim como a solução de Johann, a de Jakob similarmente deu um passo essencial para o desenvolvimento do cálculo de variações, pois ela também estava intimamente atrelada a certos princípios de minimização. Sua abordagem foi mais metódica, utilizou de construções geométricas, semelhança de triângulos infinitesimais e o conceito de *pontos estacionários* das funções, que pode ser entendido como aqueles em cuja taxa de variação da função é nula.

A ideia chave por trás da solução de Jakob se dá na extensão desse conceito para funções, e não somente pontos. Uma vez que a braquistócrona minimiza o tempo de descida, ela passa a ser considerada uma *função estacionária*, então a taxa de variação do tempo de descida deve ser zero mediante a uma variação infinitesimal no caminho original da braquistócrona[2].

A solução dele segue da seguinte maneira. Considere a representação abaixo:

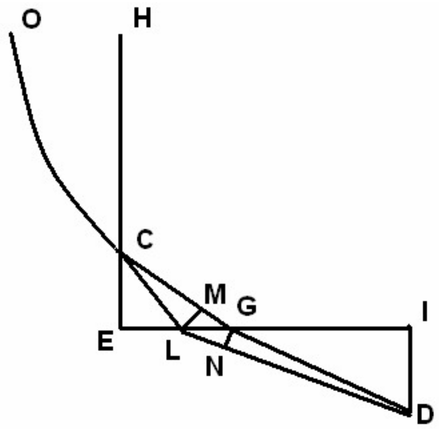

Figura 3: *Variação infinitesimal no caminho original da braquistócrona.*

Sejam CGD um pequeno trecho da braquistócrona, y a distância vertical desde o início O do percurso até um ponto nesse trecho, de modo que a partícula terá uma velocidade instantânea $\sqrt{y}$ em qualquer ponto do trecho. Vamos considerar que CG é pequeno o bastante para que a partícula se mova com velocidade constante $\sqrt{|HC|}$, onde $|HC|$ se refere ao tamanho de HC. Similarmante, vamos assumir a velocidade $\sqrt{|HE|}$ em GD.

[2]Alguns anos depois, Euler refinou essa ideia e enunciou o Princípio da Ação Estacionária: $\delta\mathcal{S} = 0$

Variamos agora o caminho movendo G uma distância horizontal infinitesimal para L. Devido às propriedades da curva, o tempo de descida em $OCLD$ também deve ser mínimo. Tendo isso, as linhas de construção ML e NG devem ser feitas de modo que os triângulos $\triangle CML$ e $\triangle DNG$ sejam isósceles. Os tempos de descida em CM e CL são portanto iguais, bem como os de GD e ND. Pelo mesmo raciocínio, como o tempo total de descida por $OCGD$ e por $OCLD$ são iguais, o tempo em MG e LN também o são, então

$$\frac{|MG|}{\sqrt{|HC|}} = \frac{|LN|}{\sqrt{|HE|}}.$$

Como estamos lidando com distâncias infinitesimais, podemos considerar ML um arco de circunferência centrada em C e $L\hat{M}G$ um ângulo reto. Por semelhança de triângulos,

$$\frac{|MG|}{|LG|} = \frac{|EG|}{|CG|}$$

se x é a distância horizontal e s o tamanho do arco da braquistócrona, então isso pode ser escrito como:

$$\frac{|MG|}{|LG|} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \text{ no segmento } CG \quad \text{e} \quad \frac{|LN|}{|LG|} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \text{ no segmento } GD$$

Dividindo por $\sqrt{y}$ em ambos os segmentos CG e GD e aplicando a relação encontrada entre $|MG|$, $|HC|$, $|LN|$ e $|HE|$, nós achamos:

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = const.$$

Da mesma forma que o seu irmão, Jakob Bernoulli reconheceu essa relação como a equação diferencial da cicloide

De fato, nenhuma das soluções dos Bernoulli's usou cálculo explicitamente. Cada um dos irmãos, por diferentes métodos, chegaram em equações diferenciais, e, encontrando-as, declararam o problema como resolvido.

6. Solução de Leonhard Euler

Todas as soluções até então não haviam considerado as fricções de contato e a resistência do ar durante o percurso do corpo em questão. Pensando em chegar em um caso mais geral, o jovem Leonhard Euler publicou na *Acta Eruditorum* de 1740 o seu primeiro trabalho, chamado *De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente* ("Sobre a curva da descida mais rápida e qualquer meio resistente"), no qual ele propos uma solução para o problema da braquistócrona que levasse em conta tais fatores resistentes do meio.

Desde a solução de Jakob Bernoulli, não havia dúvida para os matemáticos a respeito dos princípios por ele utilizados e nem depois quando outros os usaram para chegar em equações diferencias que resolviam outros problemas variacionais. Por mais que se uma curva tivesse uma propriedade de máximo ou mínimo e todas as suas partes também, Euler reconheceu que o princípio não é, em geral, verdadeiro para problemas variacionais com restrições.

Em busca de uma teoria mais abrangente, Euler se dedicou a estudar problemas que envolviam os caminhos mais curtos que conectavam dois pontos numa superfície genérica $F(x, y, z) = 0$ até que, em 1753, ele estendeu a trigonometria esférica para uma superfície arbitrária. Isso fez com que, quase naturalmente, ele passasse a dominar com maestria as técnicas de variação de curvas estacionárias e generalizar as soluções encontradas pelos irmãos Bernoulli, que na altura do campeonato já tinham lançados vários problemas variacionais um para o outro.

Em Agosto de 1755, Euler recebeu uma carta de Lagrange, que com apenas 19 anos, anunciou o Cálculo de Variações de forma puramente analítica. Ele descobriu como reduzir todo o processo que aprendeu nos trabalhos de Euler para uma abordagem essencialmente analítica, que funcionava quase automaticamente e sem depender dos preceitos geométricos em superfícies arbitrárias conforme Euler vinha procedendo.

Na carta, Lagrange se referiu à observação de Euler na sua obra publicada em 1744 *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes* ("Um método para encontrar linhas curvas com propriedades de máximo ou mínimo"), que o encorajou a desenvolver a nova técnica:

Portanto, é desejável um método, livre de soluções geométricas...

Euler confessou que "meditou muito tempo" sobre esse assunto, mas "a glória da primeira descoberta foi reservada ao geômetra mais penetrante de Turim, Lagrange, que, tendo utilizado apenas a análise, alcançou claramente a mesma solução que o autor [Euler] deduziu por considerações geométricas". Desde então, foi apenas o método de Lagrange que Euler chamou de Cálculo de Variações. Esse constume continuou entre os matemáticos até 1850.

7. Consequências

Atualmente, encontramos diversas aplicações do cálculo variacional na ciência. O princípio da ação mínima pode ser expandido para obter equações de movimentos em campos clássicos e relativísticos, como o campo eletromagnético e o campo gravitacional. A equação de campo de Einstein, por exemplo, utiliza a ação de Einstein-Hilbert, que é descrita também pelo princípio variacional, uma vez que o campo gravitavional é também um funcional estacionário. Isso está relacionado com o fato de que um corpo massivo sempre se move pelo espaço-tempo de maneira a causar a mínima curvatura nele.

Na mecânica quântica, os sistemas não seguem um único caminho de ação estacionária, mas o comportamento do sistema depende de todos os outros caminhos possíveis e do valor de suas respectivas ações. Essa ideia foi desenvolvida pelo físico americano Richard Feynman após uma sugestão de Paul Dirac em 1948 de abordar a mecânica quântica com métodos variacionais, utilizando as famosas "Integrais de Caminho de Feynman", que soma todos os possíveis trajetos da partícula. Ainda que muito útil em mecânica newtoniana, as ações são mais aproveitadas em generalizações da moderna.

Um outro ramo desenvolvido no século vinte que teve suas raízes no cálculo das variações é a Teoria de Controle Ótimo, que pode enfrentar problemas de maior generalização e abstração que o cálculo de variações por permitir otimizar funcionais não lineares e não suaves. Longe de ser somente uma abstração matemática, muitos problemas físicos podem ser resolvidos com essa teoria, como o problema de pousar uma aeronave da maneira mais suave e com o mínimo de gasto de combustível possível e a construção da coluna ideal.

8. Conclusão

Se Galileu tivesse acertado a sua abdução, o cálculo variacional muito provavelmente não teria sido desenvolvido como o conhecemos hoje. Todo o formalismo que hoje é carregado nas teorias descritas anteriormente seria completamente diferentes e quiçá nem sequer exixtiriam. No entanto, a sede de mais desafios de pessoas como Galileu, os irmãos Bernoulli, Newton, Euler e Einstein eventualmente promoveriam outros avanços tão impactantes quanto o cálculo variacional, implicando que hoje em dia teríamos um modelo da ciência que não dependessem da variação infinitesimal de uma curva estacionária por exemplo, mas mesmo assim esse modelo certamente teria uma generalidade tão grande quanto.

Refletindo ainda sobre todas as consequências causadas pela abdução de Galileu, nota-se que elas reverberam até os dias de hoje, evidenciando assim verdadeiras situações que, muitas vezes pelo acaso da curiosidade humana, não se perdem no tempo, mas sim, contribuem para o avanço do intelecto humano e se firmam na história.

9. Referências Bibliográficas

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone/

The Brachistochrone Problem: Mathematics for a Broad Audience via a Large Context Problem - Jeff Babb James Currie (Department of Mathematics and Statistics, University of Winnipeg, Canada)

A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century - Herman Heine Goldstine

A Brief Survey of the History of the Calculus of Variations and its Applications - James Ferguson (University of Victoria)

Quick! Find a Solution to the Brachistochrone Problem – Mark Levi

Studies in the History and Philosophy of Mathematics 5 - Robert E. Bradley and C. Edward Sandifer

The Brachistochrone, with Steve Strogatz - 3Blue1Brown

Two New Sciences – Galileo Galilei

Inductive Logic - Dov M. Gabbay, Stephan Hartmann and John Woods