Luisa D'Antola de Mello — nº USP 10740001

A sequência de Fibonacci

Instituto de Física da USP
Cálculo Diferencial e Integral I
Prof. Oscar João Abdounur

Julho de 2020

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo apresentar a sequência de Fibonacci e explorar sua história e algumas de suas propriedades matemáticas e também mostrar onde a sequência e os números de Fibonacci aparecem. Com esse intuito, vamos começar conhecendo a definição da sequência.

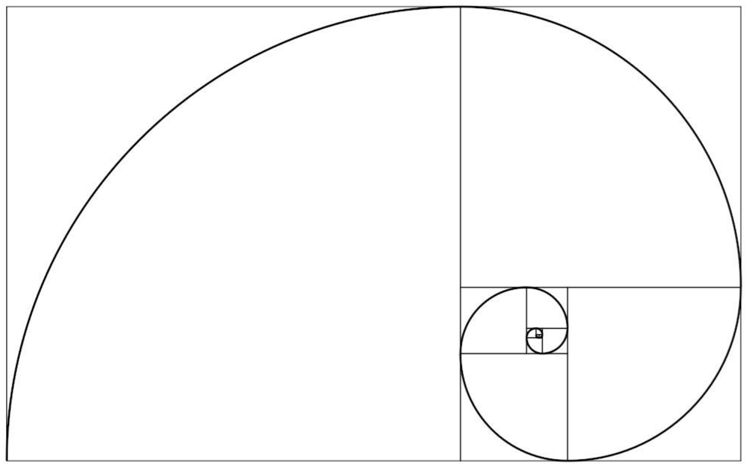

Figura 1: Espiral de Fibonacci, formada desenhando-se arcos circulares conectando vértices opostos de quadrados em que os lados crescem como os números da sequência

Começando em 0 e 1, a sequência de Fibonacci tem cada um de seus próximos elementos F_n definidos recursivamente como a soma de dois dos seus antecessores imediados, como na equação 1 a seguir.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1}$$

Portanto, com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, temos $F_2 = 0 + 1 = 1$ e assim por diante:

$$\text{Fib:} \quad 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

É importante ressaltar que algumas vezes a sequência é apresentada omitindo-se F_0, com a recursão da equação 1 válida para $n > 2$. [1] Nesse trabalho, vamos considerar a sequência dessa maneira.

A sequência é relacionada à proporção áurea e aparece frequentemente em padrões da natureza, sendo também muito usada na arte e até mesmo na área financeira, tendo muitas propriedades matemáticas interessantes.

2 História

A chamada sequência de Fibonacci já era conhecida em meados de 300a.C, na matemática indiana. Para a poesia sânscrita, era de interesse que se enumerassem todos os padrões de sílabas longas de 2 "unidades de duração"(L), justapostas com sílabas curtas, de 1 "unidade de duração"(C), que um poema pudesse comportar. Esse problema é apresentado pelo matemático indiano Pingala, como explicado a seguir.

Considerando um número n de unidades de duração, de quantas maneiras é possível arranjar silabas longas e curtas? Pensando recursivamente, a última sílaba só pode ser uma sílaba longa ou uma sílaba curta. Caso seja L, o número de maneiras possíveis é o mesmo do caso com $n-2$ unidades. Caso seja C, o número de maneiras é o mesmo de $n-1$ unidades. Assim, o número total de possibilidades é a soma dos dois casos, ou seja, o termo F_n da sequência de Fibonacci, considerando $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$. Veja a figura 2.

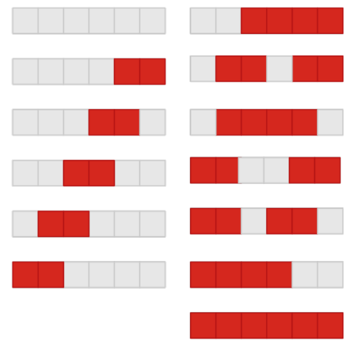

Figura 2: Esquema representativo das maneiras de se preencher, um poema de 6 unidades de duração, com sílabas longas L, representadas por vermelho ou curtas C, representadas por cinza; são $13(F_6)$ maneiras.

Entretanto, como é comum acontecer na matemática, nem sempre a primeira pessoa a apresentar uma coisa nova acaba sendo creditada e a sequência ficou com o nome de Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, um matemático italiano que em 1202 publicou seu livro *Liber Abaci* introduzindo e popularizando os numerais indo-arábicos ao ocidente.

No livro, Leonardo discute o crescimento de uma população idealizada de coelhos: Um par de coelhos recém-nascidos é colocado em um campo; cada par reprodutor acasala com um mês de idade e no final do segundo mês eles sempre dão a luz a outro par reprodutor de coelhos; considerando que os coelhos nunca morrem e continuam se reproduzindo para sempre, quantos pares de coelhos se terá ao final de um ano?

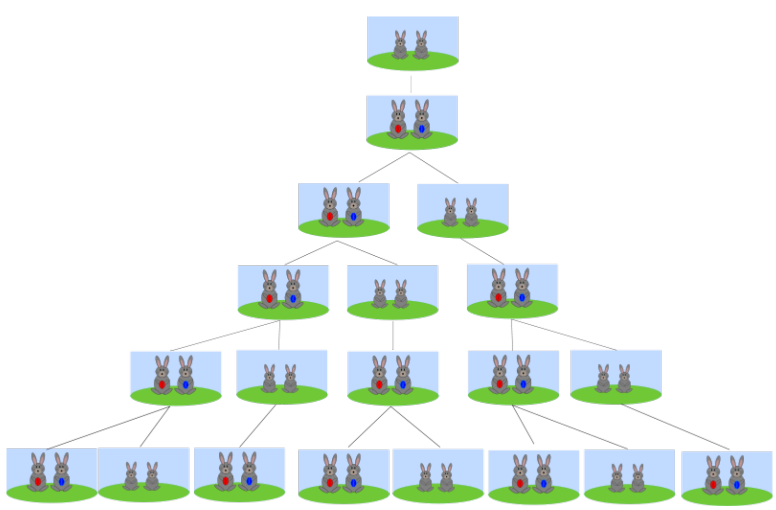

Figura 3: Esquema do crescimento da população de coelhos: coelhos de barriga azul e vermelha representam um par adulto, que acasala.

Veja a figura 3. Ao final do primeiro mês, o primeiro par acasala, mas ainda é só um par. No segundo mês, dão a luz a mais um par e há dois pares. No terceiro mês, o segundo par acasala e o primeiro dá luz a mais um par, sendo 3 pares no total e assim por diante. O resultado é que no n-ésimo mês, o número de pares de coelhos é a soma de pares maduros do mês $n-2$ mais o número de pares vivos no mês $n-1$, que darão luz. Ou seja, no n-ésimo mês, o número de pares de coelhos é o n-ésimo número na sequência.

Atualmente, os números de Fibonacci são amplamente conhecidos e utilizados, vistos até mesmo em qualquer lugar por olhos esforçados o suficiente, o que acaba se tornando prejudicial na face da divulgação matemática. Para evitar que isso aconteça, se deve conhecer e entender suas propriedades e aplicações.

3 Propriedades matemáticas

A sequência de Fibonacci tem diversas identidades e propriedades matemáticas interessantes, sendo aqui mostradas algumas das mais simples e conhecidas delas.

3.1 Proporção áurea

Dois números positivos x e y, com $x > y$, estão em proporção áurea se

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} = \phi \tag{2}$$

e essa razão é comumente denotada por ϕ. Pela equação 2, temos a equação de segundo grau

$$\phi = \frac{\phi+1}{\phi} \quad \longleftrightarrow \quad \phi^2 = \phi + 1 \tag{3}$$

o que nos dá como raizes

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \phi_+ \approx 1,61803398875 \tag{4}$$

sendo ϕ_+, a raiz positiva da equação 3, conhecida como número de ouro.

Uma das propriedades da série de Fibonacci é que seu termo geral pode ser escrito em função de ϕ, como na equação 5.

$$F(n) = \frac{\phi_+^n - \phi_-^n}{\sqrt{5}} \tag{5}$$

Além disso, outro fato notável é que a razão F_n/F_{n-1} se aproxima do número de ouro a medida que n cresce.

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{3}{2} = 1,5 \qquad \frac{5}{3} = 1,6666... \qquad \ldots \qquad \frac{6765}{4181} = 1,6180339...$$

3.2 Divisibilidade

A série tem algumas propriedades interessantes quanto a divisibilidade e máximo divisor comum. Cada n-ésimo número da sequência é múltiplo de F_n, o que, num caso especial, torna cada terceiro número par e também significa que

$$\mathrm{mdc}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{mdc}(m,n)} \tag{6}$$

Algumas outras propriedades são:

- Se m é divisível por n, então F_m é divisível por F_n.
- Se $\mathrm{mdc}(m, n) = k$, então $\mathrm{mdc}(F_m, F_n) = F_k$
- Quaisquer três números consecutivos da sequência têm pares primos entre si (o único divisor comum entre eles é 1).

3.3 Teorema de Zeckendorf

O teorema, descoberto e provado pelo matemático Edouard Zeckendorf em 1972, afirma que "todo número inteiro positivo pode ser unicamente representado como a soma de números de Fibonacci de índices não consecutivos".

$4 = F_1 + F_4 = 1+4 \qquad 12 = F_1 + F_4 + F_6 = 1+3+8 \qquad 100 = F_4 + F_6 + F_{11} = 3+8+89$

3.4 Triângulo de Pascal

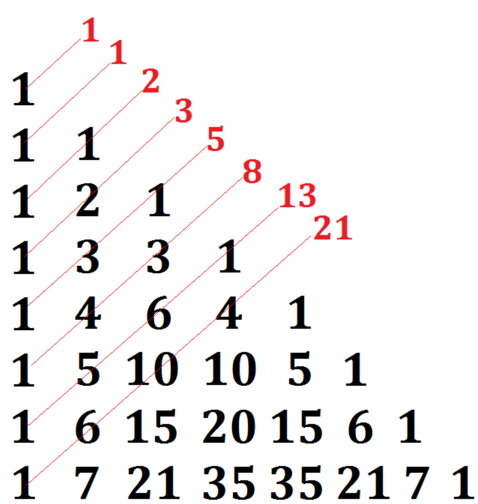

Figura 4: Fibonacci no Triângulo de Pascal

A sequência também aparece no triângulo de pascal. Ajustando o triângulo para a esquerda para melhor visualização, os números na diagonal somados formam os números de Fibonacci, como mostrado na figura 4.

4 Fibonacci na natureza

Na natureza, podemos observar os números de Fibonacci na espiral do nautilus, na folha de uma bromélia, no número crescente de galhos de uma árvore, na reprodução de algumas espécies de abelhas

Figura 5: Espirais de Fibonacci na natureza

5 Fibonacci na Arte

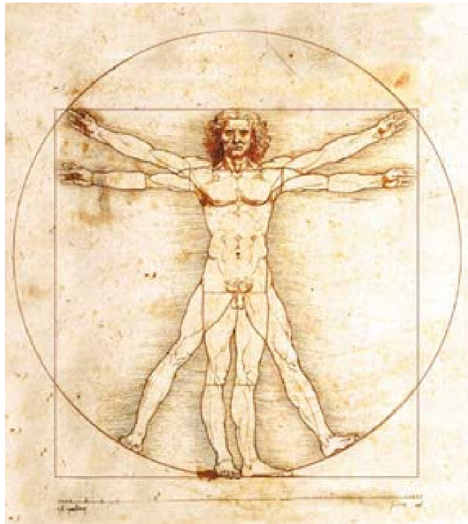

Figura 6: Homem vitruviano, de Leonardo da Vinci

Na arte, a sequência de Fibonacci e a proporção áurea foram amplamente usadas por diversos artistas em esculturas, pinturas, músicas e até mesmo em construções. Alguns exemplos são o homem vitruviano de Leonardo da Vinci, no cinema o filme Pi, de Darren Aronofsky.

Referências

[1] Wikipedia, (2001). *Fibonacci Number*
Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number>
Acesso em: 9 jul. 2020

[2] Wikipedia, (2001). *Sequência de Fibonacci*
Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Sequ%C3%AAncia_de_Fibonacci>
Acesso em: 9 jul. 2020

[3] Wikipedia, (2001). *Fibonacci*
Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci>
Acesso em: 9 jul. 2020

[4] Wikipedia, (2001). *Proporção Áurea*
Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea>
Acesso em: 9 jul. 2020