Nome: Stephanie Katarinie Monteiro Gomes

Matrícula: 9167973 Cálculo I

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo tratar dos chamados três problemas clássicos, partindo do princípio de que, apesar de terem surgido através da geometria grega, suas resoluções são impossíveis através de metodologias puramente geométricas e sua resolução somente é possível através de métodos algébricos.

Os três problemas clássicos são: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. Estes são problemas da geometria do período de Euclides que não podem ser resolvidos somente através do uso de régua (sem escalas) e compasso, um método geométrico através do qual, só é possível obter medidas e resultados de números construtíveis.

Através da tentativa de construção desses três problemas clássicos houve um grande desenvolvimento na área da matemática.

Introdução

No período da antiguidade na Grécia, surgiram grandes pensadores, pessoas que se dedicavam à reflexão de diversos temas relacionados às relações humanas e naturais. Em especial, os chamados filósofos naturais, observavam fenômenos da natureza na tentativa de compreender e poder explicar o mundo, o universo e a existência através da razão, sem recorrer a explicações sobrenaturais dos deuses. A matemática, a principio usada como uma ferramenta prática para o dia a dia das pessoas (administração das cidades e aldeias, colheita, marcação do tempo, contagem de rebanho), passou a ser explorada por alguns desses filósofos como Euclides e Tales de Mileto, (não de maneira prática, pois em seus primórdios na Grécia a filosofia não tinha o intento de ter uma aplicação na realidade), na área de geometria.

Os três problemas clássicos a serem tratados foram desenvolvidos através das chamadas ferramentas euclidianas: uma régua não graduada e um compasso. Os sistemas métricos e suas convenções, tais quais as conhecemos hoje, não existiam na Grécia antiga, e as unidades de medida podiam mudar de acordo com os governantes locais e as cidades-estados gregas (por exemplo, uma parte do corpo do governante como sua mão podia ser usada como unidade de medida, mas assim que esse governante morria, o próximo governante podia mudar esta determinação), portanto para os presente problemas, a régua não tinha graduação e era admitido uma medida x qualquer para estabelecer como unidade de medida. O compasso era efetivamente usado para fazer as medidas dos seguimentos de reta traçados pela régua, não ficando restrito somente para desenhar circunferências.

Para compreender os três problemas clássicos é necessário entender o conceito e as propriedades dos números construtíveis, uma vez que construções geométricas com régua e compasso só podem ser feitas com esse conjunto numérico. Veremos que se trata de um conjunto numérico contido dentro do conjunto dos números reais que podem ser representados por um segmento de reta de módulo x, obtido através de uma quantidade limitada de procedimentos com a régua e o compasso. Usaremos o símbolo $\mathscr{C}$ para representar este conjunto. Os problemas clássicos tem como principal característica o fato de não poderem ser resolvidos somente com uso de régua e compasso, pois somente números construtíveis podem ser inferidos com este método, portanto inserido nestes problemas teremos um elemento numérico fora do conjunto $\mathscr{C}$. Estes elementos têm a denominação de números transcendentes e não podem ser construídos através do uso de régua e compasso. São exemplos de número transcendentes os números π e o número de Euler representado por *e.*

Na tentativa de conseguir resolver os problemas clássicos foi possível verificar que somente podiam ser resolvidos com recursos algébricos desenvolvidos posteriormente.

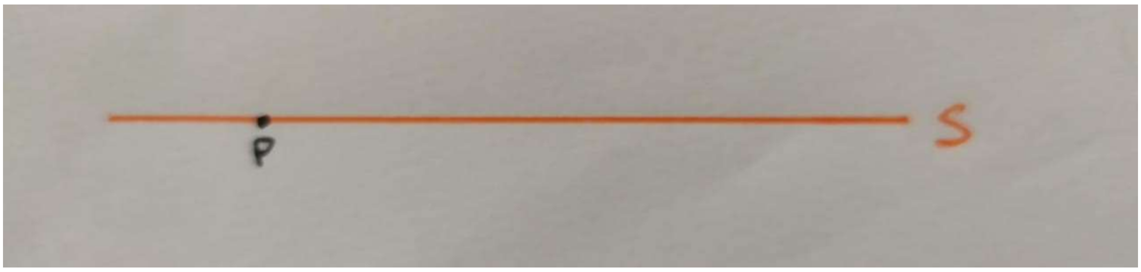
Números Construtíveis e Números Transcendentes

Números Construtíveis

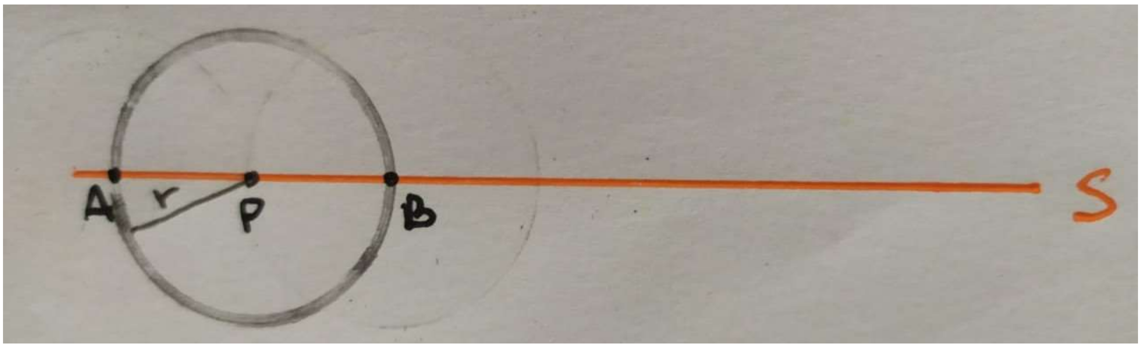
Veremos uma noção de números de números construtíveis e um exemplo sobre a construção de √2, sem, contudo, nos aprofundar no assunto por não ser o objetivo do trabalho.

Definição: O conjunto dos números construtíveis $\mathscr{C}$ é composto por números que podem ser obtidos através da construção com régua e compasso, uma vez que é estabelecida uma unidade de módulo *n* qualquer igual a 1, através de uma semirreta medida com o compasso.

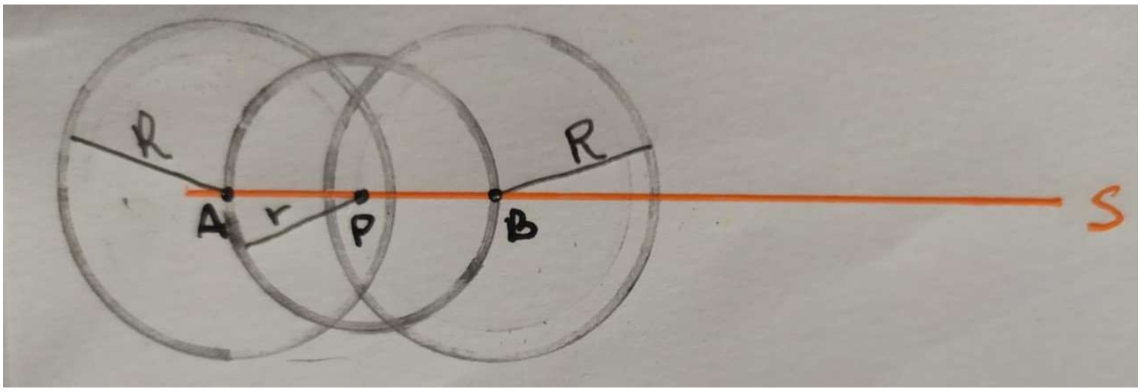
O conjunto C está contido dentro do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$ e com base na construção com régua e compasso. Em muitas pesquisas como a de Valderi Candido da Costa veremos que a maioria dos números construtíveis estão dentro do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, podendo ser expressados na forma de a/b com b≠0, contudo encontraremos dentro das construções com régua e compasso alguns números irracionais como √2 e √3 como veremos no exemplo a seguir iniciando pelo traçado de uma semirreta *s* com um ponto escolhido *P*



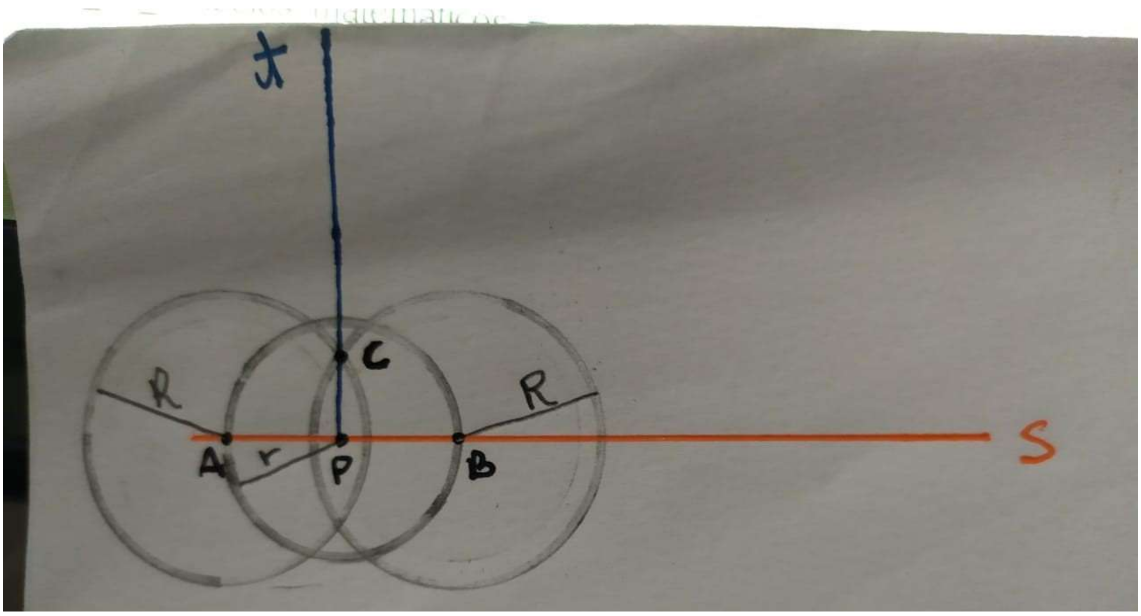
Com o compasso traçamos uma circunferência de raio *r*, com centro na origem do ponto *P* e no ponto de intersecção da circunferência com a semirreta s marcamos dois ponto A e B



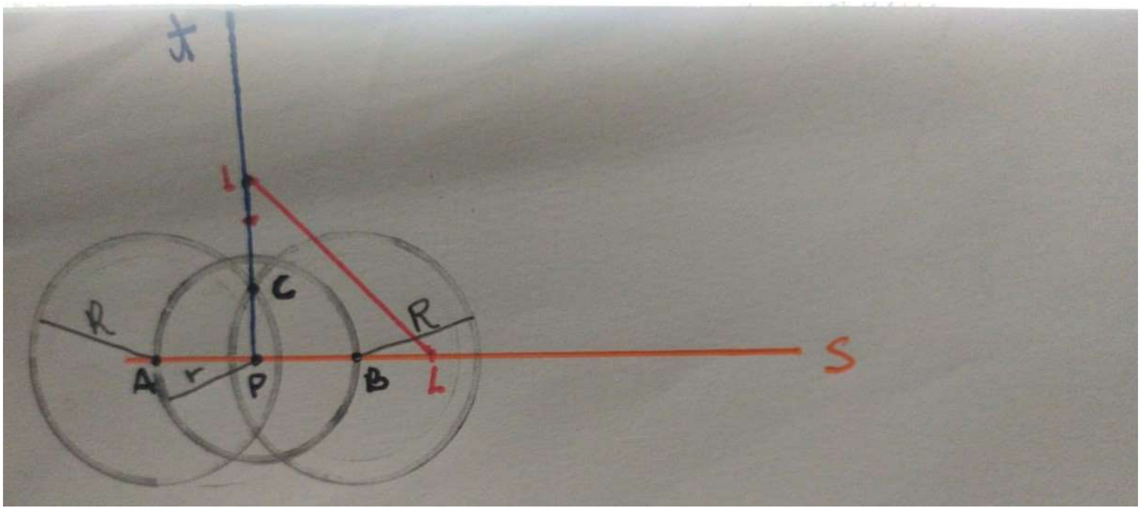
Traçamos mais duas circunferências de raio *R* com centro nos pontos *A* e *B*



Escolhemos um ponto de intersecção *C* entre as duas esferas de raio R e traçamos uma reta *t* que passa por *P* e por *C* obtendo assim uma reta ortogonal a reta *s*



Obtida a reta ortogonal escolheremos um módulo que será denominado nosso valor unitário na reta s e na reta t como dado abaixo, unindo os dois pontos de módulo 1 formando um triangulo retângulo



De acordo com o teorema de Pitágoras temos que a soma do quadrado dos catetos *c* de um triangulo retângulo é igual ao quadrado da hipotenusa *h*, portanto com base nos valores dos catetos do triangulo temos

$$h^2=c^2+c^2$$

$$h^2=1^2+1^2$$

$$h=\sqrt{2}$$

Demonstramos assim que √2 é construtível com régua e compasso.

Números Transcendentes

Por dicotomia aos números construtíveis, os números transcendentes, que também estão contidos dentro dos reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$,por sua vez são aqueles que não podem ser construídos por régua e compasso de maneira exata, não importa o número de construções feitas para tentar obtê-lo. Não iremos nos aprofundar em números transcendentes devido a sua complexidade e necessidade de um maior espaço para sua pesquisa. Iremos nos ater aos casos simbólicos abaixo.

Exemplos:

- A constante π;

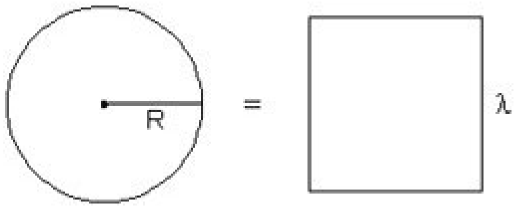
- O número de Euler *e;*

- O número $\sqrt[3]{2}$.

Os três problemas clássicos gregos

1. **A Quadratura do Círculo**

Este problema consiste em obter o lado λ de um quadrado que possua a área igual a um determinado círculo de raio *R*.



Para obter o lado do quadrado de lado λ que tem a mesma área do círculo de raio R precisamos igualar a área de ambas as figuras. *Ac* será a área do círculo e *Aq* será a área do quadrado

$$Ac=Aq$$

substituímos igualando a fórmula da área do círculo com a fórmula da área do quadrado

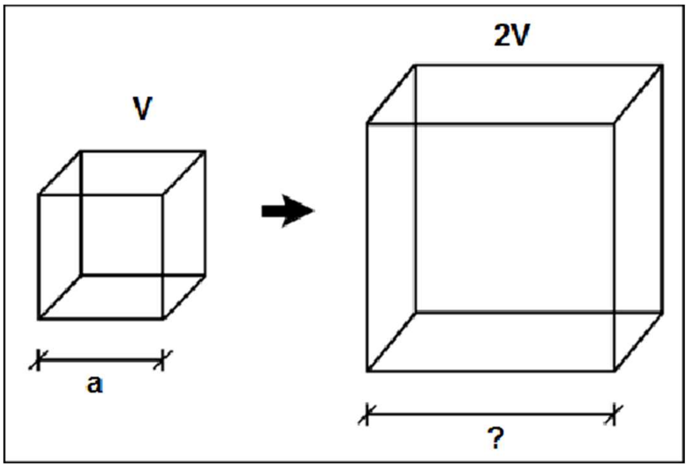
$$\pi R^2=\lambda^2$$

isolando o lado do quadrado obteremos a seguinte equação

$$\lambda=R\sqrt{\pi} \qquad \text{Equação (1)}$$

2. **A Duplicação do Cubo**

Este problema tem como objeto descobrir o valor do lado *b*(?) de um cubo, com base em outro cubo de lado *a* conhecido que possui metade do volume do cubo de lado *b*



Para conseguir verificar o valor do lado do cubo duplicado de lado b, temos que fazê-lo de maneira algébrica novamente, igualando os volumes dos dois cubos

$$Va=Vb$$

$$V=2V$$

Substituindo pela fórmula de volume em ambos os lados da equação

$$a^3=2b^3$$

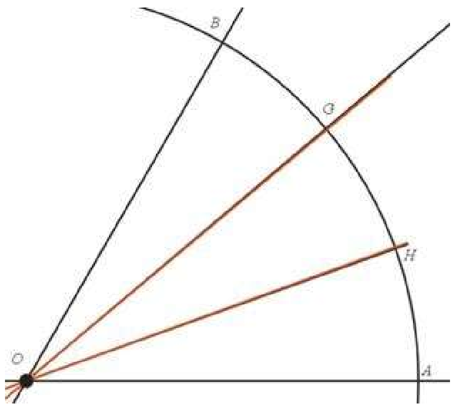
Isolando o lado *b* obtemos a seguinte equação

$$b=a\sqrt[3]{2}$$

É possível desenhar √2, como foi demostrado através da construção com régua e compasso do triângulo retângulo, mas não existe método para desenhar a $\sqrt[3]{2}$ com estes instrumentos por se tratar de um número transcendente.

3. A Trissecção do Ângulo

Trata-se de poder dividir por três qualquer um ângulo θ em três partes iguais.



Veremos que existem ângulos construtíveis, ou seja, que podem ser divididos no sistema $\theta/3$, contudo como essa regra não é válida para todos os ângulos então a trissecção do é considerada um problema impossível de ser resolvido com construção através da régua e compasso. De acordo com o professor Pedro Fagundes só podemos considerar um a trissecção de um ângulo possível através da construção com régua e compasso se o caso de enquadrar no seguinte teorema:

Teorema: Um ângulo θ qualquer, é considerado construtível se, somente se, o número real $cos\theta$ (ou $sen\theta$) for construtível.

Como explicado também pelo professor Pedro Fagundes, através das relações trigonométricas podemos obter uma equação para verificar a seguinte proposição:

Proposição: Caso a equação possua coeficientes racionais e sua raiz ou uma de suas raízes for racional, então todas as raízes são construtíveis e é possível fazer a trissecção do ângulo.

Conclusão

Os chamados números construtivos impõem a restrição do uso de régua e compasso para compor seu conjunto numérico. Tendo em vista esse requisito, os três problemas clássicos são assim chamados por não ser possível construí-los sem uso da ferramenta algébrica. Nos casos da quadratura do círculo e da duplicação do cubo o surgimento de números transcendentes em suas resoluções impede a resolução por régua e compasso. No caso da trissecção do ângulo a restrição está na não possibilidade da construção ser aplicada para qualquer ângulo. do Na tentativa de possibilitar a sua resolução com uso da régua e do compasso as ferramentas matemáticas foram amplamente desenvolvidas nesse sentido.

Referências bibliográficas

http://mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Valderi.pdf

https://www.youtube.com/playlist?list=PLxI8Can9yAHfNyvX-yLFWjeDPoTUW0sAe

https://www.youtube.com/watch?v=PhV2xqgBZ0g

https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-29112016-141932/publico/RafaelMartinsGusmai_revisada.pdf

http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf