Gabriel S. Pires nº USP: 7279668

• Trabalho de cálculo

Os paradoxos de Zenão

• O presente trabalho tem como objetivos a exposição ~~[illegible]~~ de alguns dos mais famosos paradoxos elaborados por Zenão de Eleia e a identificação da relação que estes guardam com o cálculo diferencial e integral.

• Contextualização histórica: Zenão nasceu na cidade de Eleia (atual Vélia), na Itália, em aproximadamente 490 A.C. Foi discípulo de Parmênides, fundador da escola Eleática de pensamento, se dedicando principalmente à defesa das principais ideias que compunham a doutrina desta escola. Zenão tornou-se famoso pela elaboração de problemas ou "paradoxos" que visavam demonstrar o raciocínio por trás das conclusões às quais a escola chegara e ~~[illegible]~~ assim, convencer aqueles que os ouvissem. A principal ideia a que Zenão se opõe, por meio de seus paradoxos, é a possibilidade do movimento, argumentando que ~~[illegible]~~ ~~a~~ qualquer locomoção percebida pelos sentidos* não passa de uma ilusão.

Paradoxo da Flecha

• O paradoxo da Flecha, de Zenão, diz que em qualquer instante indivisível de tempo, todo e qualquer objeto estará em repouso. Não estará se movendo para onde está, pois já está lá e não estará se movendo para qualquer outro lugar, pois não há decurso de tempo em que o movimento possa ocorrer. Este paradoxo revela a concepção de tempo que tinham Zenão e a escola Eleática, como sendo composto de infinitos e sucessivos instantes indivisíveis de tempo, ao invés de uma curva contínua. Zenão usou a trajetória de uma flecha ~~para~~ como exemplo, para ilustrar seu raciocínio e sua visão acerca do movimento, mas a lógica seria válida para qualquer objeto.

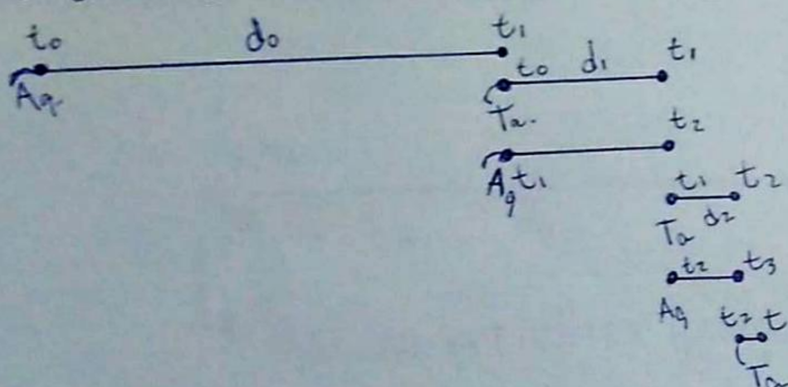
t_0 t_1 t_2 t_3 ...

• • • • • • • • • •

↳ Concepção de tempo de Zenão e da escola eleática. O tempo não seria contínuo, mas composto de infinitos instantes indivisíveis.

Aquiles e a tartaruga

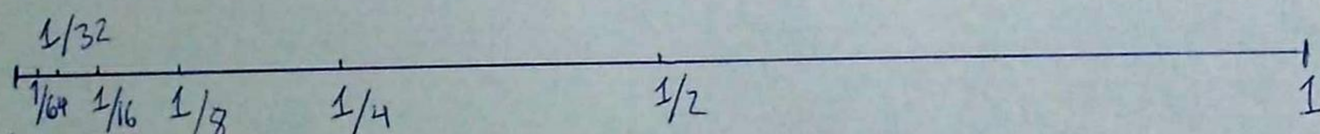
• O paradoxo de Aquiles estipula que se Aquiles fosse apostar uma corrida com uma tartaruga, se movendo com uma velocidade maior do que a dela, mas dando a ela uma vantagem espacial inicial, para alcançá-la, Aquiles teria primeiramente, de percorrer a distância que o separava da tartaruga no instante inicial da corrida, mas no tempo que demoraria para fazê-lo, a tartaruga teria se movido para frente uma determinada distância. Aquiles teria então, de percorrer essa distância adicional que a tartaruga teria andado, para que pudesse alcançá-la, mas no tempo que levaria para percorrê-la, a tartaruga teria andado uma outra distância adicional, e assim infinitamente.



• Infinitas distâncias deveriam ser percorridas antes que Aquiles pudesse alcançar a tartaruga, de forma que esta se tornaria uma tarefa impossível de ser realizada.

Paradoxo da Dicotomia

• O paradoxo da dicotomia consiste na constatação de que para percorrer qualquer distância, primeiro é necessário percorrer metade do caminho, sendo necessário para o percorrimento de metade do caminho, no entanto, o transcurso de metade da metade do caminho, ou um quarto do caminho. Mas Para se percorrer um quarto do caminho, precisa-se percorrer um oitavo do caminho, e assim infinitamente. Diante da percepção de que infinitas distâncias deveriam ser percorridas antes ~~de~~ que qualquer movimento pudesse ser concluído, a conclusão a que o ouvinte do paradoxo era levado é a da impossibilidade do movimento.



↳ Para se percorrer qualquer distância, é necessário, primeiramente, percorrer infinitas distâncias menores.

Soluções propostas ao longo da história e possíveis relações com o cálculo

• Diogenes, o cínico, ao ouvir a argumentação de Zenão, levantou-se e andou, aparentemente refutando as conclusões da escola eleática. Porém, tudo que sua conduta provou foi que os sentidos percebem a existência do movimento, e não que ele existe de fato.

• Arquimedes, pelo método da exaustão, que consiste no cálculo das áreas de polígonos inscritos na área maior que se pretende calcular, e que vão se tornando cada vez menores, providenciou uma resposta de valor finito para uma soma de infinitos termos, solucionando os paradoxos da dicotomia e de Aquiles.

• Cauchy, no século $\boxed{XIX}$, prova que para $0 < x < 1$, $a + ax + ax^2 + ax^3 \dots = \frac{a}{1-x}$, dando uma resposta formal para o paradoxo da dicotomia, que consiste na prova de Cauchy com $a = 1$ e $x = 1/2$:

$$1 + 1.(1/2) + 1.(1/2)^2 + 1.(1/2)^3 \dots = \frac{1}{1-1/2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots = 1.$$

Apesar de Arquimedes já ter oferecido resposta para os ~~para~~ paradoxos da dicotomia, e possuir uma intuição do conceito de limite na sua metodologia, esta era carente de um grau mais rigoroso de formalismo.

• Nota-se, na elaboração desses paradoxos, uma falta de familiaridade com o conceito de infinito, importantíssimo para o aprendizado do cálculo moderno.

• Diversos autores, entre eles São Tomás de Aquino, rejeitaram a ideia de um tempo composto por infinitos instantes indivisíveis, concebendo-o como contínuo, e oferecendo uma refutação para o paradoxo da flecha.