

**Universidade de São Paulo
Instituto de Física-IFUSP
Professor: Oscar João Abdounur**

A lei de Snell-Descartes

**Matheus Balisa Pauliquevis
Número USP: 11809534**

1- Introdução	2
1.2- A lei de Snell-Descartes	2
1.3 - A reflexão total	3
2- História	3
2.1- Ptolomeu	4
2.2- Ibn Sahl	5
2.3- Thomas Harriot e Johannes Kepler	6
2.4- Willebrord Snellius	7
2.5- René Descartes	8
3- Consequências e aplicações da lei de Snell-Descartes	9
3.1- Pierre de Fermat	9
3.2- Christiaan Huygens e Isaac Newton	10
3.3- Algumas aplicações modernas	13
3.3.1- Fibra óptica	13
3.3.2- Generalização da Lei de Snell-Descartes/ Equações de Fresnel	13
3.3.3- Os telescópios	14
4- Discussão/Respostas e Conclusões	14
Referências	19

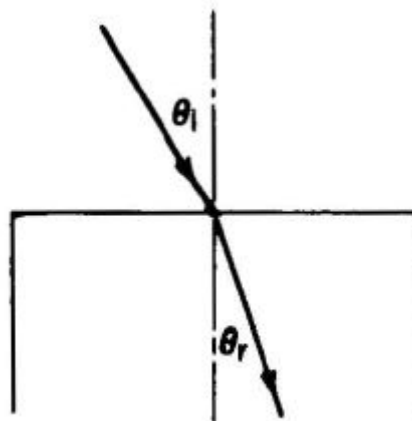
1- Introdução

Os fenômenos feitos pela luz fascinam o homem há muito tempo, afinal, nada mais natural do que se surpreender com os majestosos raios luminosos que curiosamente mudam de direção, refletem e se dividem ao apenas entrar em contato com com a matéria.

Entre eles, um dos mais notáveis é a refração. Quando a luz atinge a fronteira que separa dois materiais diferentes ela faz uma “dobra” e continua a seguir em um novo sentido e direção, até que outro obstáculo entre em seu caminho. Qual a direção e sentido que a luz irá seguir foi uma pergunta que intrigou diversos físicos e matemáticos durante muito tempo. Hoje, através da Lei de Snell-Descartes (ou apenas Lei de Snell), sabemos que isso depende da maneira que a luz incide nessa “fronteira” e por uma relação entre os meios.

Porém, foram tomadas diversas abordagens para esse tema ao longo da história e, quase sempre, de maneiras e contextos muito diferentes, o que leva à uma análise peculiar sobre as utilidades e aplicações desta lei. Atualmente, grande parte de nossas ações no cotidiano tem alguma relação com ela, como por exemplo: a fibra óptica que é presente na vida de bilhões de pessoas. Todavia, isso vem apenas desta lei? Ao analisar a história de sua construção poderá ser possível responder uma pergunta de grande relevância: qual a importância do cálculo diferencial para a lei de Snell-Descartes?

1.2- A lei de Snell-Descartes



Representação esquemática da lei de Snell-Descartes

A lei hoje conhecida como lei de Snell-Descartes tem a seguinte forma:

$$n_1 \cdot \text{sen}\theta_i = n_2 \cdot \text{sen}\theta_r$$

Em que n_1 e n_2 são os índices de refração dos dois materiais, sendo o material 2 aquele em que ocorre a incidência luminosa, e θ_i e θ_r são os ângulos de incidência (primeiro meio) e refração (segundo meio), respectivamente, que a direção da luz faz em relação a reta normal a fronteira entre os meios.

O índice de refração é uma constante física caracterizada por uma relação sobre a velocidade da luz no meio, e é definido por $n_i = c/v_i$ para um índice de refração de um meio i , onde a velocidade da luz nele é v_i e c é a velocidade da luz no vácuo.

A lei de Snell-Descartes também pode, portanto, ser reescrito como $v_2 \cdot \text{sen}\theta_i = v_1 \cdot \text{sen}\theta_r$, o que mostra que essa lei não representa apenas uma relação entre os ângulos, mas também uma relação entre as velocidades da luz em diferentes meios.

É importante notar que quando a luz passa de um meio menos refringente (com um índice de refração menor do que do segundo meio) sua nova direção irá se aproximar da reta normal perpendicular a fronteira entre os dois meios e, para a situação contrária, a luz se afasta da reta normal.

1.3 - A reflexão total

A reflexão total é um fenômeno que é consequência direta da lei de Snell-Descartes. Uma vez que pela lei, quando um raio de luz incide em um meio menos refringente ele se afasta da normal, quanto maior for o ângulo de incidência também maior será o afastamento. Entretanto, isso é válido até certo ponto. Quando o ângulo de incidência é tal que o ângulo de refração é rasante (90°), ele é chamado de ângulo limite, pois, para $\theta_i > \theta_{lim}$ ocorre a reflexão total, em que a luz é quase inteiramente refletida. Para aplicações práticas o valor de θ_{lim} pode ser encontrado, através da lei de Snell-Descartes, pela relação $\text{sen}\theta_{lim} = n_{menor}/n_{maior}$.

2- História

Ao longo da história diversos cientistas, de diversas maneiras, tentaram achar a uma lei que explicasse o fenômeno da refração. As abordagens de cada um

eram aquelas em consonância com seu contexto histórico e conhecimento matemático da época. Cada cientista teve sua particularidade e se baseou em algum trabalho matemático anterior a si. Os principais personagens relacionados com essa teoria são apresentados a seguir.

2.1- Ptolomeu

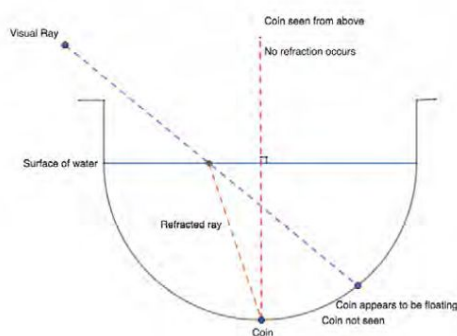
Ptolomeu foi um cientista grego que viveu em Alexandria, no Egito, por volta dos anos de 100 D.C e 170 D.C, em pleno império romano. Desenvolveu trabalhos para vários ramos diferentes do conhecimento. Seus trabalhos mais conhecidos são relacionados com astronomia, geografia e óptica.

No contexto de Ptolomeu, a ciência e o conhecimento eram vistos de maneira mais qualitativa e filosófica. Suas principais conclusões foram feitas apenas através de observações sem qualquer tipo de teste ou experimento, e muito menos alguma formalização matemática generalizando suas conclusões. Por este motivo, muitas de suas ideias estavam erradas e foram concluídas de maneira equivocada.

Contudo, surpreendentemente, esse não foi o caso para seus estudos de óptica. Ao observar a refração da luz entre meios, e perceber que havia alguma relação entre os ângulos de incidência e refração, Ptolomeu fez experimentos com a utilização de geometria para poder concluir qual era tal conexão.

Não se sabe ao certo quais foram as influências de Ptolomeu para fazer tal análise geométrica, mas o mais provável é o livro *Elementos*, de Euclides.

Em seu quinto livro, *Optics*, Ptolomeu descreve um experimento feito com uma moeda e um vaso onde a moeda só pode ser vista quando o vaso é preenchido com água por efeitos da refração. Essa explicação foi utilizada para mostrar que nós enxergamos as imagens de objetos, cujo o raio de luz originário tenha sofrido refração, de maneira como se o objeto estivesse vindo de um raio de luz que percorreu um caminho reto. A partir disso, ele explica seus experimentos e apresenta seus resultados para as combinações de: ar e água, ar e vidro.



Experimento de Ptolomeu

AIR TO WATER	
incidence	refraction
10	8.0
20	15.5
30	22.5
40	28.0
50	35.0
60	40.5
70	45.5
80	50.0

Tabela de Ptolomeu do ar para água

Angle in air	Angle in water
10°	7-1/2°
20°	15°
30°	22°
40°	29°
50°	35°
60°	40-1/2°
70°	45°
80°	48°

Valores obtidos pela lei verdadeira

Percebe-se que seus dados, quando comparados com os obtidos pela lei de Snell-Descartes, são incrivelmente parecidos, principalmente para os ângulos pequenos. Além de tudo nota-se também que a tabela de Ptolomeu segue perfeitamente uma função de segundo grau sobre a relação θ_i/θ_r . Então, conclui-se que Ptolomeu acreditou, a partir dos seus resultados, que a verdadeira lei seria na forma $\theta_i \sim \theta_r^2$ e, então, alterou seus dados na tabela para que ela se ajustasse a tal.

No fim de tudo, a única conclusão que ele chegou a afirmar em seu livro foi: $\theta'_i/\theta'_r > \theta_i/\theta_r$ onde θ'_i é um ângulo maior que θ_i e, θ'_r e θ_r são seus respectivos ângulos no meio 2 (em relação a normal). Do ponto de vista de Ptolomeu esse resultado era muito coerente, afinal, não havia indícios de que a luz poderia se afastar da reta normal. Como a ciência na sua época tinha caráter mais qualitativo, sua principal e mais poderosa ferramenta era a observação, e como o ar possui um índice de refração quase igual ao mínimo (do vácuo), praticamente quase todas, senão todas, as situações de refração observadas por Ptolomeu se observava a luz passar de um meio menos refringente (o ar) para um mais refringente, o que impossibilitou-o de tirar conclusões mais certeiras.

Vale ressaltar que a história poderia ter sido diferente se o vidro que Ptolomeu utilizou tivesse um índice de refração um pouco menor. Em suas experiências, Ptolomeu, naturalmente, testou apenas a refração da água para o vidro, onde, as diferenças entre os índices é pequena. Porém, o índice de refração do vidro que ele utilizou era um pouco maior do que o da água. Se fosse possível realizar a experiência no sentido contrário, Ptolomeu iria observar o feixe se afastando da reta normal, podendo até mesmo observar o fenômeno de reflexão total, o que poderia mudar suas conclusões para resultados mais próximos dos verdadeiros.

2.2- Ibn Sahl

Ibn Sahl foi um físico e matemático persa que viveu entre os anos de 940 e 1000. Escreveu estudos sobre diversos temas do conhecimento, mas suas principais descobertas foram relacionadas à óptica.

Sahl viveu durante a idade de ouro islâmica, um período de valorização do conhecimento na sociedade árabe e muçulmana, período este que foi muito importante para o desenvolvimento da óptica em particular. O contexto histórico em que viveu tinha forte influência para que ele procurasse a lei da refração. Nessa época, também houveram grandes avanços no desenvolvimento do método científico. Logo, agora Sahl possuía ferramentas muito mais poderosas que as de Ptolomeu e, assim, Sahl realizou suas pesquisas para achar a lei da refração.

Sahl estava estudando esferas, e então, com uma esfera de vidro transparente baseou-se nos estudos de Ptolomeu e fez diversos experimentos que foram seguidos de uma análise unicamente geométrica. Assim, ele concluiu:

$$\text{sen}\theta_i / \text{sen}\theta_r = n$$

Com n sendo uma constante que varia para cada combinação de materiais escolhida.

O que não é nada menos do que a própria lei de Snell-Descartes sem a utilização formal dos índices de refração. Então percebe-se que o primeiro a descobrir a lei da refração não foi nem Snell e nem Descartes mas sim um físico persa do século X.

A maioria dos trabalhos de Sahl foram registrados e comentados no livro "*Book of optics*", de Ibn al-Haytham, contudo a pesquisa sobre a lei da refração não foi explicitada no mesmo, o fato dele ter feito tal descoberta só foi desvendado novamente no século XX.

Apesar do conhecimento ter sido passado para outros cientistas, como o próprio Ibn al-Haytham, este utilizava apenas a lei aproximada para ângulos pequenos ($\theta_i/\theta_r = n$, isso era válido pela relação hoje conhecida como teorema fundamental da trigonometria: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \text{sen}\theta/\theta = 1$) que era mais útil para aplicações da época. Nota-se que essa foi a primeira utilização, mesmo que informal, de um conceito de cálculo diferencial relacionado com trabalhos sobre a lei de Snell-Descartes.

2.3- Thomas Harriot e Johannes Kepler

Johannes Kepler foi um astrônomo e matemático alemão, e é mais conhecido por suas leis sobre a mecânica celeste. Mas Kepler também fez alguns estudos sobre óptica.

Kepler utilizou-se da tabela de Ptolomeu para tentar descobrir a lei da refração. Como já citado anteriormente, os dados de Ptolomeu não eram confiáveis, pois foram alterados para se ajustar em uma parábola. Portanto, ele estabeleceu e publicou uma equação um tanto quanto estranha. Sua lei da refração era:

$$\theta_i - \theta_r = k \cdot \theta_i \cdot \text{sec}\theta_r$$

sendo k uma constante.

É importante notar que Kepler não era um físico experimental e, por isso, sua interpretação de dados não foi nada mais do que desleixada. Um fator importante de se tirar das conclusões de Kepler foi que a lei da refração era praticamente

impossível de ser deduzida através de apenas experimentos em sua época devido a dificuldade (naquele período histórico) em se realizar medidas com ângulos grandes ($>60^\circ$). Por isso a lei da refração de Kepler era muito condizente com as medidas obtidas por Ptolomeu, que tinham diferenças insignificantes para ângulos pequenos, e diferenças pequenas, entretanto, significativas para ângulos grandes, que fizeram a lei de Kepler ser diferente da lei de Snell-Descartes.

O astrônomo publicou sua lei em um artigo. Posteriormente tentou fazer correções nela após descobrir que Thomas Harriot, um matemático inglês contemporâneo a Kepler, havia feitos vários experimentos detalhados medindo os ângulos de incidência e refração. Ao tentar contatar Harriot, o alemão conseguiu poucas informações, pois Harriot não estava disposto a compartilhá-las detalhadamente, de maneira que Kepler desistiu de prosseguir.

O que Kepler não sabia era que Harriot possuía a própria lei da refração em suas mãos. Ele nunca chegou a publicá-la ou mencioná-la em suas cartas enviadas a Kepler, entretanto, em seus rascunhos foram encontrados escritos de 1602 (antes de Snell e Descartes) com a verdadeira lei da refração, incluindo a notação dos índices de refração. Foram encontrados nos escritos de parceiros de pesquisa dele informações sobre como eram feitos seus experimentos e de que maneira ocorreram as análises e conclusões, feitas apenas com a utilização da geometria. Harriot também estudou 60 anos antes de Newton a refração da luz em prismas e determinou diversos índices de refração de vários líquidos diferentes.

2.4- Willebrord Snellius

Willebrord Snellius foi um astrônomo e matemático holandês a quem hoje é atribuída a lei da refração. Em muitos países, a lei é chamada unicamente de lei de Snell, sem a consideração de Descartes para ela.

Snell se tornou professor da universidade de Leiden e então se dedicou às suas pesquisas matemáticas. Entre elas, estavam registros de trabalhos que duraram anos sobre a lei da refração que, no entanto, nunca foram publicados, mas foram mencionados no livro *Dioptrics* do físico holandês Christiaan Huygens, o que o levou a um grande reconhecimento internacional.

Apesar da lei ser atribuída a ele por causa do reconhecimento de Huygens, Snell não foi o primeiro a descobri-la, e nem mesmo a fez perfeitamente. Na conclusão de Snell, ele acha a relação $\text{sen}\theta_i / \text{sen}\theta_r = k$, porém a constante encontrada por ele é o inverso daquela encontrada por Ibn Sahl. Dessa forma, a equação de Snell escrita da maneira certa seria: $\text{sen}\theta_i / \text{sen}\theta_r = 1/k$.

Outro fator importante a se discutir, é o porquê de nem Harriot ou Snell haverem publicado seus resultados. Ambos tinham equipes de pesquisa pequenas e, apesar de terem um certo reconhecimento, não tinham muitos recursos. No seus

respectivos períodos históricos a publicação de artigos era algo muito caro e difícil de ser feito, e na falta de possibilidades para conseguir fazê-las, nenhum deles publicou umas das leis mais importantes da física para suas épocas.

2.5- René Descartes

René Descartes foi um dos mais notórios matemáticos da história, tendo também um grande trabalho como filósofo. Por isso a maioria de seus trabalhos contém paralelos entre a filosofia e a matemática.

Como visto, Descartes não foi o primeiro a descobrir a lei, e também não foi o primeiro a publicá-la. Ela já estava presente na quinta edição do livro *Cursus mathematicus* de Pierre Herigone, porém, Herigone não estabeleceu nenhuma prova para a formação da lei e muito menos a utilizou para a resolução de problemas clássicos, fazendo com que o trabalho de Herigone foi esquecido. Por isso, Descartes, por ele dito, inspirado nos trabalhos de Kepler, apresentou uma demonstração para a lei e recebeu o crédito pela descoberta, que foi relatada em seu livro *Optics* de 1637.

Como inventor da geometria analítica, naturalmente, ele utilizava da álgebra na análise geométrica. Então, em seu livro, para poder fazer com que a leitura fosse possível de se entender para um leitor comum, ele estabeleceu 3 analogias: a primeira era que a luz funciona como um bastão branco sendo transportado nos meios com velocidade infinita e sem transportar matéria; a segunda que a luz funciona igual o movimento do vinho em uma barril com um buraco e cheio de uvas pressionadas, de maneira que o vinho segue caminhos retos sem interferência entre eles, igualmente à luz; a terceira afirmava que a luz funciona da mesma maneira que uma bola quando entra em contato com sólidos e líquidos.

Ademais de tais analogias, ele fez algumas suposições sobre as propriedades da luz: que ela se move como uma partícula, assume que mesmo com a velocidade da luz sendo infinita, ela possuía velocidades mais rápidas em meios mais densos e, além de tudo não se movimenta, mas, essencialmente, possui tendência de movimento.

Ao estabelecer isso, Descartes, pela análise da situação da bola, percebeu que a componente horizontal do momento não se alterava e então com uma explicação simples, que de maneira indireta já utilizava da terceira lei de Newton, conclui a lei da reflexão. Logo após isso, Descartes chegou a conclusões de que a bola percorreria distâncias iguais em diferentes direções em tempos iguais. A partir disso, percebeu que a relação dos ângulos era feita por seus senos e assim deduziu a lei da refração.

Apesar de Descartes não falar a respeito de suas influências para tal demonstração em seu livro, contemporâneos de Descartes e historiadores

matemáticos atuais descobriram que foram matemáticos medievais que já haviam feito muitas dessas analogias entre a luz e eventos cotidianos. Como Descartes também era um filósofo e influenciado por matemáticos medievais, fez então uma demonstração sem embasamento científico que, para ele, era totalmente cabível.

Apesar de ter chegado na resposta certa através da matemática, Descartes enxergava-a como uma filosofia (não apenas a matemática, mas qualquer outra ciência), razão que o levou a nunca testar experimentalmente sua teoria.

Descartes já era conhecido por seus trabalhos de filosofia e geometria analítica, e também já tinha dinheiro vindo de herança, então, diferente de Snell ou Harriot, já possuía muitos recursos e, por isso, não foi problema algum publicar seu trabalho. Assim, após anos para que houvesse aceitação da comunidade científica da época, que não foi feita de maneira homogênea, a lei de Descartes se consolidou.

Até a publicação do livro *Optics* de Huygens, a lei era atribuída somente a Descartes, porém, como a resolução de Descartes usou diversas suposições erradas e analogias de aparência forçada e não teve comprovação experimental, foram feitas acusações de que ele haveria forçado que sua resolução chegasse a resposta de Snell. Isaac Vossius chegou a acusar Descartes de plágio, afirmando que ele havia copiado as anotações de Snell. Hoje em dia se sabe que essa acusação não é verdadeira.

É importante perceber que durante toda a história da demonstração e procura da lei de Snell-Descartes não foi necessário nenhuma utilização do cálculo diferencial, o que incita uma primeira impressão de que o cálculo não tem importância para trabalhos da lei de Snell-Descartes.

3- Consequências e aplicações da lei de Snell-Descartes

Agora, com o conhecimento da lei e de sua história, qual foi a importância desta lei? Partindo dessa questão, além de tentar responder qual a importância do cálculo diferencial para a lei de Snell-Descartes, também pode-se pensar em outra pergunta interessante pelo rumo da história, a inversa: qual a importância da lei de Snell-Descartes para o cálculo diferencial?

3.1- Pierre de Fermat

Pierre de Fermat foi um juiz de Direito contemporâneo a Descartes que dedicava suas horas vagas para o estudo da matemática e que fez diversas descobertas importantes no ramo. Entre elas, inventou, na mesma época que Descartes, a geometria analítica, muitas vezes utilizando de métodos mais úteis e inovadores que do filósofo. Um exemplo é o seu método de encontrar tangentes, que se assemelha muito ao conceito atual de derivada. Por este e outros motivos, ambos eram muito críticos um em relação ao trabalho do outro, de maneira que Descartes prejudicou muito a confiabilidade dos trabalhos de Fermat para a comunidade da época.

Assim, com a frágil comprovação de Descartes sobre a lei da refração, Fermat afirmou: "Descartes não provou nada". Com isso, tentou achar a lei da refração por si só.

Ele supôs, ao contrário de Descartes, que a luz não tinha velocidade infinita, mas sim que era mais lenta em meios mais densos e que não se movia como uma partícula. Esperando encontrar uma solução diferente, Fermat procurou durante anos a resposta. Para achá-la estabeleceu o que hoje é conhecido por "Princípio de Fermat": a luz percorre o caminho entre dois pontos que dura menos tempo para percorrê-lo. A partir disso estabeleceu uma equação para o tempo que a luz demoraria para percorrer de um ponto ao outro e, utilizando seu método de achar máximos e mínimos, encontrou a mesma lei que Descartes concluiu.

Os resultados dos dois apenas foram iguais porque Descartes errou 2 vezes: ao considerar que a luz se movia mais rápido em meios mais densos, e que a luz se comportava como uma partícula. Hoje a comprovação de Fermat é a que se encaixa nos princípios atuais e a de Descartes não é nem mesmo considerada nos ensinamentos de óptica e cálculo diferencial.

Outro fator importante é como conclusões erradas de um princípio físico-matemático podem proporcionar o avanço do conhecimento. A rivalidade entre Descartes e Fermat proporcionou um olhar extremamente crítico entre seus trabalhos. Por mais que Descartes tivesse chegado em um resultado diferente, já que suas suposições foram feitas de maneira errada e precipitada, e errado a lei da refração, Fermat o teria feito de maneira certa, assim, finalmente proporcionando a lei procurada há tantos anos.

Dessa maneira, pode-se dizer que a descoberta da lei de Snell poderia ter sido descoberta por consequência dos erros de Descartes. Além disso, mesmo com Descartes acertando o resultado, a lei da refração, conseqüentemente, na procura de Fermat por sua verdadeira demonstração, gerou a descoberta do princípio do tempo mínimo.

3.2- Christiaan Huygens e Isaac Newton

Isaac Newton e Christiaan Huygens foram dois dos maiores físicos da história. Ambos foram de suma importância para a revolução científica do século XVII e tiveram contribuições muito importantes no ramo da óptica.

Isaac Newton é uma das figuras mais conhecidas na história da ciência, e é a quem é atribuída a invenção do cálculo diferencial, além de também ter sido, possivelmente, o cientista que fez mais contribuições significativas nos ramos da matemática, física e astronomia em consideração a sua época.

No século XVII prismas e fenômenos multicoloridos se tornaram objetos de estudos para diversos cientistas da época. Lendo trabalhos a respeito, Newton resolveu fazer suas próprias pesquisas no tema, tirando importantes conclusões. Através de muitos experimentos, Newton estabeleceu que a luz branca (do sol) era composta de todas as cores do arco-íris, cada uma com seu índice de refração. Ele elaborou uma lei que determinava o caminho que tais cores iriam seguir, contudo isso não passava de uma expansão da lei encontrada por Descartes. Porém, em seu livro, ele havia afirmado anteriormente, que discordava dos princípios físicos adotados por Descartes em sua demonstração, conceitos estes que foram adotados por Newton nesta resolução, já que utilizou-se da luz como apenas um raio geométrico (sem considerar suas propriedades) e considerou que a componente horizontal da velocidade não se alterava.

Ao não utilizar uma abordagem física de suas conclusões, Newton deixou de lado diversos fatores que são essenciais para a verdadeira descoberta do comportamento da luz.

Mais tarde, Newton amadureceu seu raciocínio para a abordagem do problema de maneira que, a partir de seus conceitos de mecânica, fez sua própria demonstração da lei da refração e construiu um conjunto de propriedades da luz. Após isso, Newton também percebeu que as cores não possuíam índices de refração diferentes, mas sim velocidades diferentes em meios diferentes, finalizando assim sua teoria das cores.

Para confirmar sua teoria das cores, Newton percebeu que a utilização de espelhos em telescópios poderia comprovar e otimizar sua teoria. O telescópio construído por ele era mais potente que o de Galileu, e não apresentava aberrações cromáticas. No fim de tudo, Newton conseguiu abandonar suas bases nos conceitos de Descartes, pois ele havia aprimorado seus conhecimentos sobre física e óptica e, assim, também melhorar seus conhecimentos sobre a luz.

Christiaan Huygens foi outro grande físico que contribuiu com avanços enormes para a ciência, incluindo a descoberta do relógio de pêndulo, a criação da

física-matemática e, como será visto a frente, o princípio de Huygens. De maneira semelhante a Newton, Huygens estudou outros dois fenômenos que não eram explicados pela lei de Snell-Descartes, a refração estranha e a refração dupla, que podiam ser observados quando ocorria a incidência de raios de luz em cristais da Islândia. Quando a luz incidia nestes cristais ela era refratada de maneira incomum. Quando um raio de luz atinge a superfície perpendicularmente ao plano do cristal, ao invés de permanecer na mesma direção, como era esperado pela lei de Snell-Descartes, ele muda de direção. Já quando o raio de luz incide paralelamente às pontas do cristal, não ocorre mudança de direção, contrariando novamente a lei. Além disso, quando qualquer raio que tivesse mudança de direção incidisse no cristal, ocorria a formação de duas imagens para cada raio incidente, por isso a denominação de “refração dupla”.

Ao analisar esses cristais pela primeira vez, Huygens, que também havia criticado duramente a demonstração de Descartes, teve um primeiro intuito de utilizar a luz por um olhar de matemático, utilizando-se de princípios de Descartes, tratando-a apenas como raios geométricos. Isso impossibilitou-o de ter conclusões gerais para propriedades da luz, pois, assim como Newton, estudou os fenômenos através das propriedades dos raios de luz, e não da luz em si. Assim, Huygens finalizou seu trabalho concluindo uma lei específica para os cristais da Islândia que acrescentava muito pouco ao conhecimento da época.

Contudo, restaram duas perguntas de Huygens que não foram respondidas: por que a luz é refratada? E, por que ela acontece de maneira diferente para os cristais da Islândia? Huygens só conseguiu encontrar as respostas para estas perguntas depois de 5 anos ao formular o que hoje é conhecido como princípio de Huygens. É importante notar que essa descoberta só foi possível porque o holandês, assim como Newton, abandonou o pensamento cartesiano da luz.

O princípio de Huygens é muito importante, pois foi utilizado para dois experimentos muito significativos para a física: o experimento da difração de ondas e o da dupla fenda. O segundo, em particular tem uma notória importância, pois foi fundamental para criação da física quântica, ainda que não tenha sido o primeiro experimento deste ramo, mas foi o que o mais acrescentou possibilidades a esse campo.

Destas circunstâncias, também é necessário perceber a importância da influência da época. Ambos os trabalhos iniciais foram feitos antes de 1670, período em que a maioria dos textos referentes à luz continham suposições cartesianas e apenas tratados matemáticos, sendo que nestes trabalhos eram estudadas as propriedades dos raios e não da luz em si. Isso levou até mesmo estes dois grandes físicos a terem esse tipo de raciocínio em suas primeiras impressões de fenômenos que necessitavam de uma interpretação bem diferente. Por isso, anos depois, com a ciência utilizando outra abordagem, diferente da de Descartes, eles foram capazes de chegar a resultados condizentes com a natureza dos fenômenos.

A mudança de abordagem e época foram os motivos que levaram Newton e Huygens a serem os primeiros que perceberam a verdadeira importância da lei de Snell-Descartes. Durante quase 30 anos não houve qualquer utilização prática ou teórica desta lei. Entretanto, aos olhos destes dois grandes cientistas, foi notado que fenômenos que “contradiziam” a lei, na verdade eram apenas reafirmações desta e que revelavam ainda mais o seu potencial para o entendimento da natureza.

Pode-se, assim, ver uma importante observação para as respostas das questões colocadas. A lei da refração de Snell-Descartes possibilitou os estudos destes cientistas sobre estes assuntos, pois não podiam ser feitos até uma formalização teórica da lei, o que os levou a estudos que não poderiam ter sido respondidos sem o conhecimento do cálculo diferencial.

3.3- Algumas aplicações modernas

Como já citado anteriormente, a lei de Snell-Descartes está no cotidiano da maioria das pessoas através de suas aplicações. Dessa maneira, é importante saber quais são estas. Neste tópico poderão ser vistas as últimas observações para as conclusões e respostas das perguntas que regem o texto.

3.3.1- Fibra óptica

Provavelmente a aplicação mais importante da lei de Snell, a fibra óptica é uma estrutura de cabos interligados, que possuem uma estrutura interna complexa em seu interior, que é utilizada para a transmissão da luz e captação de dados. Atualmente é empregada em diversas situações tais como aplicações médicas, decorações, estudos avançados da espectroscopia, etc. Mas a aplicação mais importante da fibra óptica é sua importância para as telecomunicações, como a internet e a televisão.

O funcionamento da fibra óptica é estritamente dependente da lei da refração, pois a transmissão da luz é feita através do fenômeno de reflexão total. A luz é emitida a partir de um certo ponto e precisa ser guiada através das fibras. Entretanto, para que a luz não saia das fibras elas possuem um núcleo de filamento de vidro e um revestimento externo ao vidro que é menos refringente que este mesmo vidro. Assim, se a luz for emitida de maneira que atinja o ângulo limite durante sua transmissão, a fibra conseguirá guiá-la.

3.3.2- Generalização da Lei de Snell-Descartes/ Equações de Fresnel

Através das equações de Maxwell, conjunto de leis fundamentais do eletromagnetismo, foi deduzida uma nova generalização da lei de Snell-Descartes em que se utiliza da representação dos raios de luz como vetores, com relações mais complexas entre ângulos e meios que também são úteis para casos em que, a partir da lei se chega a $\sin\theta_r > 1$.

A nova forma da lei foi útil para Augustin-Jean Fresnel, um físico francês que a partir da generalização encontrada achou as equações hoje conhecidas como equações de Fresnel. A descoberta de Fresnel foi útil para calcular qual porcentagem dos raios de luz incidentes serão refletidos e qual porcentagem será refratada. As equações de Fresnel, consequência direta da aplicação da lei de Snell-Descartes em sua forma generalizada, têm aplicações em campos da física e da tecnologia, incluindo a medicina, câmeras fotográficas, telescópios, entre outras.

3.3.3- Os telescópios

Os telescópios são instrumentos ópticos feitos com a intenção de uma melhor observação do espaço, e são amplamente utilizados na astronomia e como aparelho de entretenimento para amadores na área interessadas no espaço.

As lentes também são aplicações diretas da lei de Snell-Descartes, já que não são nada mais do que aparelhos ópticos feitos de maneira que os raios de luz se encontrem em um único ponto, chamado de ponto focal, que é encontrado através da lei. Foram inventadas no século X e, através de diversos aprimoramentos durante os séculos, são utilizadas em diversas situações tanto cotidianas quanto científicas.

A criação do telescópio é atribuída a Hans Lippershey mas, o primeiro aprimoramento deste, que concebeu o primeiro telescópio utilizado para estudos astronômicos, foi feito por Galileu. Mais tarde, como visto anteriormente, Newton criou um telescópio utilizando espelhos que proporcionavam uma potência de ampliação muito maior que o telescópio de Galileu. Mais recentemente, o desenvolvimento dos telescópios inclui um melhoramento dos telescópios manuais, a criação dos telescópios eletrônicos com capacidade muito superior ao feito por Newton, que são essenciais para o estudos atuais da astronomia.

4- Discussão/Respostas e Conclusões

Para responder as perguntas é preciso analisar a história da criação da lei de maneira crítica. Isso nos leva a outra pergunta: como saber o que seria desta lei sem o cálculo diferencial se os estudos dela foram feitos apenas após o cálculo ser inventado (sendo que os conceitos principais do cálculo, já haviam sido pensados de maneira informal muito tempo antes)? Na busca da resposta dessa pergunta deve-se lembrar que a lei de Snell-Descartes já havia sido descoberta por Ibn Sahl antes da influência direta do cálculo em trabalhos matemáticos ou físicos. Isso nos leva a outra questão: se a lei da refração é tão importante, porque ela foi descoberta e depois esquecida durante 600 anos?

Para responder a última pergunta é preciso analisar os avanços científicos durante estes 600 anos. Em 1608, quando Descartes tinha apenas 16 anos, ainda distante da descoberta da lei da refração, houve a criação do telescópio. Apenas dois anos depois Galileu, utilizando seus conhecimentos sobre a refração, o melhorou. Mas como isso seria possível se Galileu não conhecia a lei da refração?

Como foi visto anteriormente o conhecimento de Ibn Sahl foi passado à seus contemporâneos, porém de maneira informal, uma vez que o mais importante era a sua utilização para aplicações (isso pode ser um jeito de pensar o porque Ibn al-Haytham tinha apenas a lei de maneira aproximada). Alguns poderiam até ter tido o conhecimento da lei, ou até mesmo dela na forma aproximada. Contudo, o que foi propagado pela história foi o conhecimento utilizado para aplicações. Um fato que confirma isso é que, no final do século X, logo após a descoberta da lei, Sahl inventou as lentes, e al-Haytham em *Book of optics* de comentou apenas da lei aproximada e das lentes. Não é incomum que as aplicações antecedem a teoria, contudo esse não foi o caso da lei de Snell-Descartes e Galileu. A teoria antecedeu a prática, mas apenas a prática sobreviveu na passagem de conhecimento à Europa.

Também é interessante pensar no porquê dos árabes serem os primeiros a estudarem a óptica geométrica de maneira mais geral e como uma sociedade por um todo. Isso se deve ao fato dos escritos de Ptolomeu terem sido feitos em árabe. Dessa forma, os únicos que tinham possibilidade de acessar a idéia da óptica geométrica eram povos que falavam árabe. Como eles foram os primeiros da língua a terem uma revolução científica, naturalmente, eles foram pioneiros no estudo da óptica geométrica.

Percebe-se então que a lei não foi esquecida por 600 anos, mas sim utilizada de maneira indireta durante todo esse período. Porém, isso não responde o que seria da lei de Snell-Descartes sem o cálculo diferencial, pois, apesar da lei não ter sido ignorada, ela também não foi totalmente explorada, já que uma falta de formalização implica em uma menor divulgação da mesma. Então para

continuarmos a responder esta pergunta é preciso olhar para frente e observar o que não foi descoberto nestes 600 anos, e o que o cálculo diferencial possibilitou para a lei de Snell-Descartes.

Analisando as aplicações modernas da lei vê-se que ela ampliou as possibilidades de estudo e aplicações em diversas áreas da tecnologia que são muito importantes no cotidiano da sociedade moderna, além de ter possivelmente melhorado-as.

Mas, tudo na ciência leva a uma consequência. Como visto anteriormente, a lei de Snell-Descartes, e surpreendentemente, a demonstração utilizada por Descartes, influenciaram os estudos de Newton e Huygens e a maneira de que eles se desenvolveram, com respeito à teoria das cores e a refração estranha. Assim, olhando em perspectiva a lei foi a causa da descoberta da teoria das cores, da criação do telescópio newtoniano, da comprovação experimental do comportamento ondulatório da luz, e do princípio Huygens (especialmente quando se considera que o princípio de Huygens é uma das bases que criou a física quântica). Então a lei de Snell-Descartes foi uma das influências para a criação da física quântica, que por sua vez é um dos princípios que revolucionou o mundo moderno.

Porém, observa-se outro fator das aplicações da lei de Snell-Descartes: quase todas elas utilizam-se de alguma maneira do cálculo diferencial. Dos exemplos anteriormente citados pode-se ver que: a fibra óptica é utilizada para o melhoramento da coleta de dados, possibilitada pelos avanços feitos na área da computação, uma área que utiliza muito do cálculo diferencial. A generalização da lei de Snell-Descartes foi feita com as equações de Maxwell, e estas foram obtidas com o conhecimento do cálculo. As equações de Fresnel se encaixam da mesma maneira. Os telescópios atuais são muito mais desenvolvidos comparando-os com aquele criado por Newton, e isso se deve à evolução da física, astronomia, computação e engenharia que, por sua vez, utilizam massivamente o cálculo. Os exemplos são mais extensos do que os apresentados, porém a maioria segue as mesmas condições.

Vendo que a maior parte das aplicações atuais da lei precisa do cálculo, para responder qual seria a importância dela sem essa ferramenta matemática é necessário analisar quais foram as aplicações quando o cálculo não existia.

O principal período sem a utilização vasta e formal do cálculo foi a época entre Sahl e Descartes. Nesse tempo a lei de Snell-Descartes contribuiu apenas para o desenvolvimento de lentes e, conseqüentemente, a criação dos óculos. É importante ressaltar que, mesmo com o desenvolvimento proporcionado pelos árabes, a principal fonte de informação para europeus durante os séculos foram os escritos de Ptolomeu, que foram traduzidos para o latim no século XII, o que também impossibilitou a descoberta mais recente da lei da refração ou do telescópio e melhor desenvolvimento das lentes.

Ainda antes de Descartes, Harriot já havia descoberto a lei que hoje é atribuída a Snell e, por isso, ele foi o primeiro a estudar a teoria das cores (60 anos

antes de Newton) mesmo que utilizando apenas a abordagem matemática das propriedades dos raios de luz - que foi outra aplicação sem a utilização do cálculo diferencial. Um fator importante que também pode-se tirar disso é pensar o que poderia ter acontecido se Harriot tivesse publicado seu trabalho sobre a lei da refração e conseqüentemente a teoria das cores. Se isso tivesse acontecido, provavelmente Newton não teria nem mesmo iniciado seus estudos sobre o assunto e, conseqüentemente, nem mesmo ter inventado seu telescópio. Porém, por outro lado, Huygens teria tido uma abordagem diferente em seus estudos dos cristais de Islândia que poderia ter permitido a ele adiantar seus estudos sobre a luz e suas propriedades.

O que também nos leva a pensar sobre as conseqüências de um ambiente de rivalidade no mundo científico. Se Harriot comentasse de sua lei com Kepler, e não houvesse qualquer interesse da parte de Kepler pela obtenção de méritos, ele poderia ter ajudado Harriot em sua publicação e, assim, contribuído para a ciência como um todo.

Vale ressaltar que se Snell tivesse publicado seu trabalho, as conseqüências seriam muito parecidas com as que teriam ocorrido se Harriot houvesse publicado o seu próprio, mas sem o as conseqüências causadas pelo estudo da teoria das cores, já que Snell não havia entrado nesse mérito.

Outro questionamento interessante é pensar o que poderia ter acontecido se Sahl houvesse divulgado propriamente seu trabalho. Para respondê-lo é preciso abrir a perspectiva sobre o assunto. A época de ouro do Islã ocorreu durante a Idade Média, período de menor produção de conhecimento científico europeu. Dessa maneira, a Europa não contribuiria muito até metade do século XVI. A partir dessa perspectiva é importante analisar a revolução científica que ocorreu no oriente nesse período entre os séculos X e XVI.

Apesar dessa fase histórica ter a óptica como um dos grandes pilares do estudo da física, não foi o único. Houve a criação do método científico por al-Haytham, que tinha uma estrutura muito próxima à atual, o que potencializou a ciência da época. Assim, ocorreram estudos que anunciaram, mesmo que informalmente, as conhecidas hoje como leis de Newton e a lei da gravitação universal, além de estudos importantes da astrofísica, aerodinâmica e magnetismo. Os árabes também utilizaram-se de técnicas de cálculo infinitesimal, mas também sem qualquer tipo de formalização.

Todavia, para saber o que poderia ter acontecido é preciso pensar o porquê da cultura árabe não ser mais a referência em conhecimento desde o século XII. Não é conhecido ao certo qual foi causa, mas as principais suspeitas são sobre as invasões mongóis que podem ter desestabilizado a estrutura da sociedade, levando a revoltas e conflitos que deixaram a ciência de lado.

Então, com essas informações é possível refletir melhor sobre o assunto. Se Ibn Sahl tivesse divulgado propriamente seu trabalho, poderia ser possível que algum contemporâneo a ele tivesse a mesma intuição de Newton, ou de Huygens

(observando a refração estranha ou a refração dupla em um objeto diferente do cristal da Islândia) e assim descobrisse o princípio de Huygens, que ao longo dos séculos poderia aprimorar muito os conhecimentos físicos e matemáticos como aconteceu na Europa. Porém, provavelmente, a consolidação dos conceitos e suas aplicações iria demorar séculos para se desenvolver. Logo, independente da divulgação ou não da lei da refração por Sahl ter sido feita, as invasões mongóis aconteceriam pouco tempo depois, o que impossibilitaria grandes avanços científicos, por parte da cultura islã, como consequência do conhecimento da lei da refração.

Vale ressaltar que se isso tivesse sido feito, apesar de não ter grandes importâncias para o oriente, as consequências na Europa seriam muito semelhantes ao que poderia ter acontecido se Harriot tivesse publicado seu trabalho, já que a Europa era bem fechada com relação a trabalhos científicos, ainda mais vindos do oriente.

Voltando às aplicações da lei sem o cálculo diferencial, após Descartes, a lei não teve aplicações ou utilizações durante quase 30 anos (reforçando a ideia de que as aplicações da lei foram utilizadas antes da descoberta da lei por qualquer europeu e depois de Sahl) até os estudos de Newton e Huygens, que foram os últimos relacionados ao estudo da lei sem a utilização do cálculo diferencial.

A partir da análise é possível chegar às respostas das questões e as conclusões finais do texto. A resposta da primeira pergunta: “Qual é a importância do cálculo diferencial para a lei de Snell-Descartes?”. Em minha interpretação, o cálculo diferencial foi o motivo da lei de Snell-Descartes ter uma real importância na ciência atualmente e ser utilizada em diversas aplicações cotidianas, visto que sem o cálculo diferencial as principais utilidades da lei da refração seriam apenas as lentes e telescópios primitivos que, por mais que sejam importantes, não se comparam a magnitude das aplicações desta lei na atualidade. Mesmo assim, na atualidade, as principais utilidades das lentes e dos telescópios também dependem do cálculo.

A segunda pergunta: “Qual a importância da lei de Snell-Descartes para o cálculo diferencial?” deve ser respondida pensando nas possibilidades que a lei abriu para a ciência. A lei motivou os estudos de Newton e Huygens, e a partir destes houve um grande desenvolvimento nos estudos da física, principalmente com o princípio de Huygens. A lei de Snell-Descartes também foi importante para estudos posteriores, como as equações de Fresnel, que revolucionaram a óptica, ou até mesmo em diversas aplicações tecnológicas, como a fibra óptica. Portanto, a lei da refração não contribuiu diretamente para o desenvolvimento do cálculo diferencial, contudo contribuiu muito para o desenvolvimento da física e de novas tecnologias, que podem ser ditas como as maiores aplicações da matemática e do cálculo diferencial.

Algumas considerações finais importantes a se tirarem do texto são: a importância do cálculo diferencial em trabalhos que em uma primeira impressão não

são nem mesmo relacionados a ele; e a importância do processo do conhecimento de um conceito físico-matemático.

A lei da refração foi descoberta por vários cientistas durante os séculos, sem qualquer utilização do cálculo diferencial. Entretanto o cálculo ainda é extremamente necessário para a notoriedade da lei de Snell-Descartes, e isso é válido não apenas para essa lei, mas sim para muitos conceitos das mais diversas áreas do conhecimento.

O processo do conhecimento da lei de Snell-Descartes foi muito importante até mesmo para as suas outras contribuições. Apenas o fato de Ptolomeu ter sido o pioneiro nos estudos da lei e o criador da óptica geométrica fez com que os primeiros a estudarem os fenômenos da refração fossem os árabes, além de que seus trabalhos continuaram a influenciar os trabalhos de Kepler e, conseqüentemente, Descartes. Por isso, se Ptolomeu tivesse abordado o problema de maneira diferente a história poderia ter sido outra.

Ademais que se qualquer um dos outros pesquisadores que descobriram a lei tivesse publicado-a, os trabalhos de Fermat, Newton e Huygens teriam sido diferentes, podendo mudar até mesmo a maneira de como a física seria guiada na época. Assim, pode-se perceber o quão importante é o caminho feito para se encontrar um conceito físico-matemático.

Referências

Dijksterhuis, Fokko. (2004). Once Snell Breaks Down: From Geometrical to Physical Optics in the Seventeenth Century. *Annals of Science - ANN SCI*. 61. 165-185. [10.1080/0003379021000041884](https://doi.org/10.1080/0003379021000041884).

Dudley J. M. and Kwan A. M.: "Snell's law or Harriot's," *Phys. Teach.* 35, 159–162 (March 1997).

Dupertuis, M. A., Proctor, M. and Acklin, B.: "Generalization of complex Snell–Descartes and Fresnel laws," *J. Opt. Soc. Am. A* 11, 1159-1166 (1994)

Fishman RS. Perish, Then Publish: Thomas Harriot and the Sine Law of Refraction. *Arch Ophthalmol.* 2000;118(3):405–409. doi:10.1001/archophth.118.3.405

Houstoun, R. Kepler's Law of Refraction. *Nature* 144, 441 (1939). <https://doi.org/10.1038/144441b0>

Lane, C.: Race to Refraction: The Repeated Discovery of Snell's Law. Disponível em:
https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/HOMSIGMAA/Lane-Callie-HOMSIGMAA-Essay-Contest-Winner-2018.pdf (acessado em Julho de 2020)

Martinez-Borreguero, Guadalupe; Perez-rodriguez, Ángel Luis; Suero-Lopez, María Isabel and Naranjo-Correa, Francisco L.. A didactic reformulation of the laws of refraction of light. Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2018, vol.40, n.3 [cited 2020-07-15], e3401. Available from:
<http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172018000300502&lng=en&nrm=iso>. Epub Feb 01, 2018. ISSN 1806-9126.
<http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2017-0227>.

Mihas, P. (2005): Use of History in Developing ideas of refraction, lenses and rainbow. Demokritus University, Thrace, Greece

Omar, S. B. (1977). IBN al-HAYTHAM'S OPTICS. Minneapolis, Minnesota: Bibliotheca Islamica. Inc.

Pestieau, J. (2018): The Modernity of Ibn al-Haytham (965–1039), 6th International Congress on Physics of Radiation-Matter Interactions Tangier, Morocco, 7-9 May 2018

Robinson, E. et al: Fermat and the principle of least time. The Leading Edge (1987), 6(2):34 <http://dx.doi.org/10.1190/1.1439367>