

**TRABALHO DE CÁLCULO 1 (MAT0111)**

**Tema: Álgebra e Cálculo**

**Professor: Oscar Abdounur**

**Nome: Letícia Vital Ferreira**

**Número USP: 8933180**

## 1. Os conjuntos numéricos: um assunto da álgebra

Os números naturais e as operações com eles realizadas são provenientes da contagem, natural aos seres humanos desde civilizações antigas. Essa hipótese encontra ressonância nos numerais encontrados em algumas línguas nativas, como é o caso da língua Kiriri, na qual os termos para números possuem relação com as partes do corpo usadas para contar. Nessa língua, o número oito é expresso por “*myreprí wachánidikié misã saí*”, que é traduzido literalmente por “três e os dedos da mão”<sup>1</sup>. Também é o caso de uma das línguas faladas nas Ilhas Fiji, onde a palavra relativa aos numerais varia a depender do objeto que está sendo contado - dez barcos seria “*bolo*”, enquanto dez cocos seria “*koro*”<sup>2</sup>.

Dessa forma, podemos entender o conjunto dos números naturais como aqueles passíveis de serem contados, ou seja, todos os números inteiros a começar do 1. Além disso, a definição desse conjunto também estabelece que esses números respeitam o princípio da indução matemática. Apesar de civilizações antigas já terem o conceito de “nada”, o primeiro registro de um símbolo que registrasse esse conceito data de 300 AEC. O sistema numérico da Babilônia utilizava um símbolo para o zero de forma a demonstrar que aquela unidade estava sendo ocupada por um número não contável. Há incerteza quanto ao reconhecimento do zero como número, mas é possível que isso tenha acontecido no século IX, na Índia.<sup>3</sup>

O reconhecimento dos números negativos pode ser datada ao século I, na China, e foi apresentado no livro *Fiu Zhang Suanshu* (Nove capítulos da arte matemática). Nele, encontram-se provas de que os chineses daquela época utilizavam o sentido de números negativos na realização de problemas algébricos<sup>4</sup>. O reconhecimento dos números negativos, no entanto, só se deu por volta do século XVII. Esses são importantes para a configuração do conjunto dos números inteiros: estão incluídos o número zero, os números naturais e a contraparte negativa destes.

O conjunto dos números racionais, por sua vez, compreende os números que podem ser expressos na forma fracionária. Este tipo de números já era conhecido no Antigo Egito, através de estudos que datam do século 21 AEC.

O conjunto dos números irracionais compreende números que não podem ser representados pelas frações de dois números inteiros. A primeira referência a um número irracional é atribuída a Hipaso, seguidor de Pitágoras, que teria demonstrado que raiz de 2 é um número irracional. Por fim, o conjunto dos Reais é composto dos conjuntos Racionais e

---

<sup>1</sup> Aryon Dall’Igna Rodrigues. “O artigo definido e os numerais na língua Kiriri: Vocabulários Português-Kiriri e Kiriri-Português”. Revista Brasileira de Linguística Antropológica. p. 172.

<sup>2</sup> Retirado da página “Number sets” do site Encyclopedia. Visitado em julho de 2020. Disponível em: <https://www.encyclopedia.com/education/news-wires-white-papers-and-books/number-sets>

<sup>3</sup> Retirado da página “Number sets” do site Monterey Institute. Visitado em julho de 2020. Disponível em: [montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE\\_TEXT\\_RESOURCE/U12\\_L1\\_T1\\_text\\_container.html](http://montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U12_L1_T1_text_container.html)

<sup>4</sup> Aurora Gallardo. “Historical epistemological analysis in mathematical education: Negative numbers and the nothingness”. PME 32 and PME-NA XXX 2008. p. 1-17.

Irracionais.

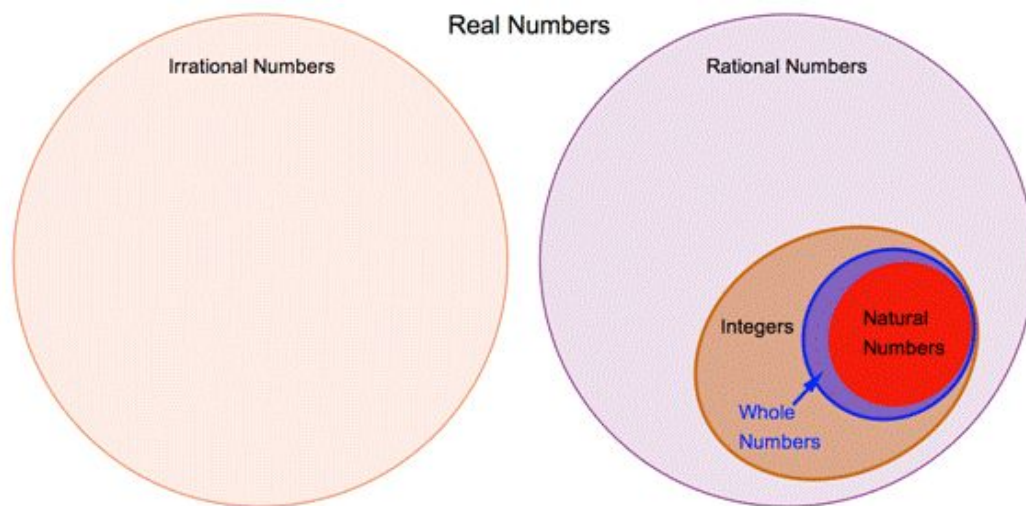


Imagem 1. Conjunto dos Reais. Imagem retirada de <http://www.montereyinstitute.org/>

O conjunto dos Números Complexos, cuja descoberta é creditada ao matemático Gerolamo Cardano, por sua vez, é composto pelos números passíveis de serem escritos na forma  $z = a + bi$ , ou seja, números que são compostos por uma parte real e uma parte imaginária. Este conjunto engloba também o conjunto dos números reais, pois estes seriam números complexos onde  $b = 0$ .

É importante notar que, apesar de os cálculos algébricos serem conhecidos há muito tempo, a classificação numérica em conjuntos é relativamente recente na história da matemática.

## 2. O subconjunto dos números transcendentais

Os conjuntos numéricos podem ser divididos em novos subconjuntos. Os números Irracionais, por exemplo, possuem um subconjunto: os números transcendentais. Para entendermos melhor a definição de número transcendental, vamos definir o que são os números não-transcendentais, os chamados números algébricos: estes são números que satisfazem equações “algébricas”, ou seja, funções que satisfazem equações do tipo

$$a_n f(x)^n + a_{n-1} f(x)^{n-1} + \dots + a_0 = 0^5$$

---

<sup>5</sup> Spivak. *Calculus*. 4ª edição, 2008. Publish or perish Inc: Houston, Texas. p. 442.

As funções estudadas na disciplina de Cálculo 1 podem ser escritas na forma de uma equação algébrica através da aproximação da função a um polinômio, ao redor de um ponto, utilizando os polinômios de Taylor, que possuem a forma:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \dots + \frac{f^n(x)(x-a)^n}{n!} \quad 6$$

Os números transcendentais, por sua vez, não podem ser soluções de equações algébricas/polinomiais. Essa categorização difere, então, números irracionais como  $\sqrt{2}$ , que pode ser solução de uma equação algébrica, de  $\pi$  e  $e$ , que são, então, categorizados como números transcendentais.

Apesar de as noções relativas às particularidades do número  $\pi$  já estarem presentes na Grécia Antiga, com questionamentos acerca da possibilidade ou não da construção de um quadrado de área equivalente à área de uma circunferência de raio 1 (ou seja, de área  $\pi^2$ ), foi só muitos séculos depois que se deu a formalização dos números transcendentais. A primeira menção à transcendência em matemática ocorreu no século XVIII por Leonhard Euler, ao discutir operações transcendentais. Leibniz, por sua vez, é o primeiro a mencionar números transcendentais.<sup>7</sup>

### 3. As equações transcendentais e a relação com o Cálculo

Assim como existem equações algébricas, também existem equações transcendentais: essas são equações que contêm uma função incapaz de ser expressa na forma algébrica. Vamos dar um exemplo de uma função transcendental estudada durante a disciplina Cálculo I:

$$f(x) = e^x - 2x - 1$$

Como podemos montar um gráfico para esta função? Sabemos que ela não apresenta descontinuidades, pois seus elementos são funções contínuas, e podemos presumir que ela possui intersecções com o eixo x (visto  $e^x$  ser uma função crescente da qual  $(2x + 1)$  está sendo subtraído. No entanto, a função possui soluções que não podem ser expressas em termos de funções elementares.

Existem dois modos possíveis para encontrar as raízes de equações transcendentais e, assim, construir gráficos mais precisos.

---

<sup>6</sup> Idem. Ibidem.

<sup>7</sup> Solomon, Marcus & Nichita, Florin. "On transcendental numbers: new results and a little history". Published in Axioms. 2003.

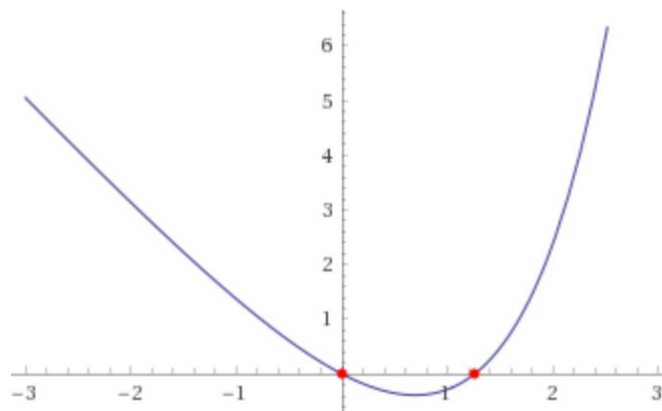
### 3.1 Forma analítica

No século XVIII, trabalhos de Lambert e Euler levaram à descoberta da função de Lambert, a qual possibilitou encontrar soluções para esse tipo de problema. A função de Lambert segue a seguinte forma:

$$w = we^w$$

No entanto, a função possui algumas particularidades: além de ser uma função transcendental,  $w$  é também uma função complexa, ou seja, tem seu domínio nos números complexos; para além disso, essa é uma função multivalorada, tendo diferentes ramificações para cada valor de número inteiros colocado. Ou seja, não há solução para o conjunto dos Reais, que é onde o Cálculo comumente se insere.

Por exemplo, para a função  $f(x) = e^x - 2x - 1$ , dada acima, a solução encontrada através da função de Lambert é  $x = -W_{-n}\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right) - \frac{1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sendo que para  $n = -1$  obtemos a solução real e, para os demais valores em  $\mathbb{Z}$  a solução é zero. O gráfico da função pode ser observado abaixo.<sup>8</sup>



### 3.2 Forma numérica

Existem alguns métodos de encontrar raízes de funções transcendentais através da forma numérica. Vamos mencionar dois métodos: o método de Newton e o método da secante.

#### 3.2.1 Método de Newton

Definição: dada uma função diferenciável  $f$  e uma aproximação inicial  $x^0$  da raiz  $\xi$  de  $f$ , defina a sequência

---

<sup>8</sup> O gráfico foi retirado do site WolframAlpha.

$$x^{(k+1)} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Ou seja, a partir de uma aproximação hipotetizada para o valor da raiz (que pode, por exemplo, ser baseada no gráfico da função), pode-se inserir o valor encontrado recursivamente na fórmula acima, de modo que a sequência  $x^k$  convirja para a raiz de  $\xi$ .

Temos um exemplo abaixo bastante similar ao proposto acima para a forma analítica de resolução. Vamos então encontrar a raiz positiva da mesma equação estudada acima.<sup>9</sup>

$$f(x) = e^x - 2x - 1$$

$$f'(x) = e^x - 2x - 1$$

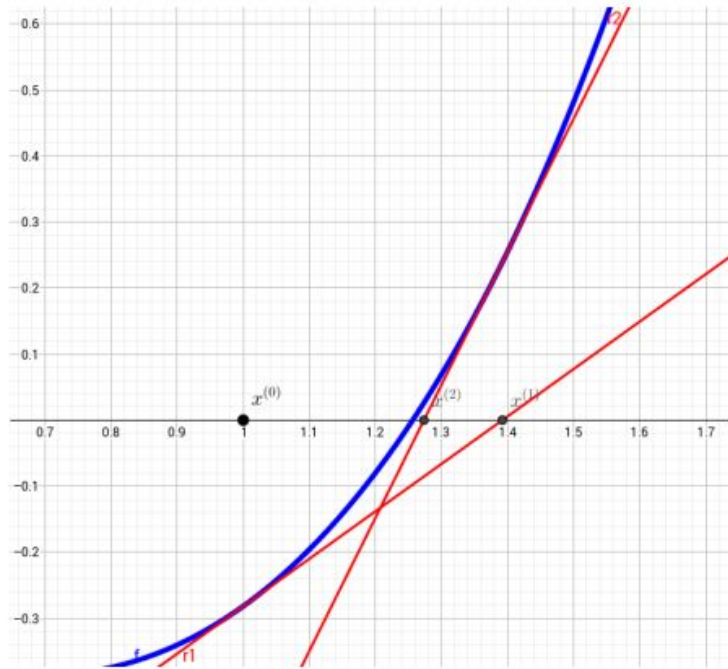
Começamos com a aproximação inicial  $x^0 = 1$ . A tabela a seguir contém os valores para a sequência de aproximações, sendo  $D_r = |x^{k+1} - x^k|$ .

$k$	$x^k$	$f(x^k)$	$f'(x^k)$	$D_r$
0	1.00000	-0.28172	0.71828	0.39221
1	1.39221	0.23932	2.02374	0.11825
2	1.273957	0.027057	-	-

A aproximação pelo método de Newton é  $\xi = 1.273957$

---

<sup>9</sup>O exemplo foi retirado do material produzido pelo Prof. Dr. Marcos Eduardo Valle para a disciplina MS211 - Cálculo Numérico, ministrada na UNICAMP. O material está disponível no site [ime.unicamp.br](http://ime.unicamp.br). Acessado em julho de 2020.



### 3.2.2 Método da secante

A grande diferença entre os métodos de Newton e da secante está no fato de que o último não necessita do cálculo da derivada da função a cada iteração. Nesse caso, a derivada é substituída pelo quociente das diferenças<sup>10</sup>

$$f'(x) \approx \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}$$

Dada uma função  $f$  e duas aproximações iniciais  $x^0$  e  $x^1$  da raiz  $\xi$  de  $f$ , defina a sequência para  $k = 1, 2, \dots$ . É esperado que a sequência convirja para a raiz  $\xi$ .

$$x^{k+1} = \frac{x^{k-1}f(x^k) - x^k f(x^{k-1})}{f(x^k) - f(x^{k-1})}$$

A equação do exemplo acima, repetida a seguir, pode ser resolvida através deste segundo método.

$$f(x) = e^x - 2x - 1$$

Iniciando-se com as aproximações  $x^0 = 1$  e  $x^1 = 2$ , pode-se construir a seguinte tabela:

$k$	$x^k$	$f(x^k)$	$D_r$
-----	-------	----------	-------

<sup>10</sup> Tanto a definição como o exemplo foram retirados do material do Prof. Dr. Marcos Eduardo Valle. Ver nota acima.

0	1.00000	-0.28172	1.0000
1	2.0000	2.3891	0.89452
2	1.10548	-0.19028	0.065991
3	1.171473	-0.116204	-

A aproximação utilizando o método da secante é  $\xi = 1.171473$ . Ou seja, há alguma divergência entre o resultado obtido pelos dois métodos numéricos.

#### 4. Conclusão

Apesar de Cálculo e Álgebra parecerem, à priori, temas sem interseções, fomos capazes de encontrar um ponto de convergência: a construção de gráficos e a resolução de equações com números transcendentais. Embora o Cálculo trate dos números Reais e Complexos, é somente através da teoria dos conjuntos, assunto da álgebra, que podemos encontrar raízes para funções transcendentais. Realizamos, então, um tratamento típico de Cálculo para essas funções através dos métodos analítico e numérico.

#### 5. Bibliografia:

Aryon Dall'Igna Rodrigues. "O artigo definido e os numerais na língua Kirirí: Vocabulários Português-Kirirí e Kirirí-Português". Revista Brasileira de Linguística Antropológica. p. 172.

Aurora Gallardo. "Historical epistemological analysis in mathematical education: Negative numbers and the nothingness". PME 32 and PME-NA XXX 2008. p. 1-17.

Solomon, Marcus & Nichita, Florin. "On transcendental numbers: new results and a little history". Published in Axioms. 2003.

Spivak. *Calculus*. 4ª edição, 2008. Publish or perish Inc: Houston, Texas. p. 442.

Valle, Marcos Eduardo. Material do curso de Cálculo Numérico da UNICAMP. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/Aula10.pdf>. Acessado em julho de 2020.

#### Sites:

Página "Number sets" do site Encyclopedia. Visitado em julho de 2020. Disponível em: <https://www.encyclopedia.com/education/news-wires-white-papers-and-books/number-sets>

Página "Number sets" do site Monterey Institute. Visitado em julho de 2020. Disponível em:



[montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE\\_TEXT\\_RESOURCE/U12\\_L1\\_T1\\_text\\_co  
ntainer.html](https://montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U12_L1_T1_text_container.html)