Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Caio Lopes de Araújo - 11820958

Diofanto e o Cálculo

Aplicações do cálculo à Equações Diofantinas

São Paulo - SP

2020

Sumário

1. Diofanto e seu trabalho

Diofanto de Alexandria, foi um matemático grego que viveu no sec. 3 DC e é considerado o "pai da álgebra", seu principal trabalho é o manuscrito "*Arithmetica*" que posteriormente foi dividido em treze livros, destes apenas seis não se perderam. Neles Diofanto utiliza de ferramentas até então não utilizadas, como a "unknown quantity" (comumente utilizada como x) e de operações de ambos os lados que visava manter a igualdade das partes (algo extremamente comum para nossa época).

Em geral os seis livros, tratam da teoria dos números resolvendo e enumerando problemas complexos para a matemática da época, esses problemas tratavam de operações com potencias de até terceiro grau.

O tratamento para equações quadráticas dada por Diofanto, é ainda uma indeterminação, visto que ele prometia no prefacio publicar o método definido como "o usado na Geometria de Heron" para a solução dessas. Para a equação cubica, ele resolve uma única muito particular.

Pontos importantes a serem levantados sobre a obra de Diofanto, é que para todas as suas soluções haveria um inteiro positivo, isto é, desconsiderava partes imaginarias, negativas e/ou irracionais, e também não admitia valores nulos para a "unknown quantity" (x=0), já na primeira demonstração do livro 4, temos: "[...]*Then, since the side (of the equation) containing the x^2's is lesser in degree than the other, we divide the whole by x^2; $9x^3$ divided by x^2 gives 9x, that is 9 roots of x^2 , 10 and the result 50 from the division of the $36x^2$ by x^2 is a number, namely 36*.[...]".

O "Último teorema de Fermat", surge das anotações de Pierre Fermat em um exemplar de *Arithmetica*, o teorema diz que para a equação $x^n + y^n = z^n$ se $n \geq 3$ não existe solução (com $n \in \mathbb{Z}_+$, e $(x, y, z) \in \mathbb{N}^*$), mais adiante Fermat diz ter encontrado uma demonstração para o teorema, porém não a publicou.

1.1 Os sete perdidos

estudos sugerem que os comentários de Hypatia (Filosofa e matemática grega) se estenderam apenas aos 6 primeiros livros, e que os demais se mantiveram intocáveis por ela, e que foram esquecidos e se perderam, infelizmente Hypatia foi perseguida e morta fanáticos cristãos. Existe também a hipótese Nesselman, que diz não serem os sete últimos que se perderam e sim os livros entre 1 e 2, essa ideia ganha mais notoriedade quando se analise os últimos livros, é fácil perceber a falta de instrumentos matemáticos para a resolução dos problemas impostos.

2. A Arithmetica e o cálculo

Como já mencionado, o trabalho de Diofanto trata muito mais teoria dos números, do que da própria álgebra. Porém os métodos utilizados para solução dos problemas dos livros, deram origem ao que chamamos de Equação de Diofantina Linear:

$$Ax + By = C$$

Onde, $A \wedge B \wedge C \in \mathbb{Z}^*$ e $x \wedge y \in \mathbb{Z}_+^*$

Neste trabalho lidaremos com esse tipo de Equação.

2.1 Preparativos

Antes de fazer algumas demonstrações, preciso evidenciar a função implícita a uma equação Diofantina.

$Ax + By = C => y = \frac{C-Ax}{B} => f(x) = \frac{C-Ax}{B}$, lidaremos então com $f(x)$ nos próximos tópicos. Utilizaremos também o intervalo $I = \mathbb{Z}_+^*$.

2.2 Limite continuidade.

Seja p, um valor pertencente ao intervalo I, logo:

$\lim_{x \to p} f(x) => \lim_{x \to p} \frac{\frac{C-Ax}{B} - \frac{C-Ap}{B}}{x-p} => \lim_{x \to p} \frac{-A(x-p)}{B(x-P)} => \lim_{x \to p} f(x) = -\frac{A}{B}$, note que existe limite de $f(x)$ em p, portanto $f(x)$ também é contínua em p. Como não houve perca de generalidade para o ponto, então qualquer p em I satisfaz.

2.3 Derivadas

No tópico anterior provamos a que existe limite de $f(x)$ em p, logo dizemos que a função f é derivável em p, assim:

$$f'(x) = \left(\frac{C-Ax}{B}\right) => f'(x) = \left(\frac{C}{B}\right)' - \left(\frac{Ax}{B}\right)' => f'(x) = 0 - \frac{A}{B} => f'(x) = -\frac{A}{B}$$

2.4 Primitiva de $f(x)$

Sabe-se do tópico 2.2 $f(x)$ é continua em I, logo podemos obter a primitiva de f,($F(x)$):

$$f(x) = \frac{C-Ax}{B} => \int f(x)dx = \int \left(\frac{C-Ax}{B}\right) dx => F(x) = -\frac{Ax^2}{2B} + \frac{Cx}{B} + k$$

3. Conclusão

Apesar das dificuldades de relacionar a principal obra de Diofanto ao cálculo, isso se deve não só pela data em que a obra foi escrita (por volta do ano 250), mas também pelo tema que o livro trata, pois se aproxima muito mais da teoria dos números do que à própria álgebra. Abordei os assuntos mais tratados na matéria de Cálculo 1 (Continuidade, Limites, derivadas e integrais), de forma a generalizar as soluções para qualquer equação diofantina.

Um breve comentário sobre a obra, as demonstrações de Diofanto são excepcionais, por mais que algumas vezes aparentem ser "simples", quando ligamos a obra à época, fica evidente a genialidade do autor, que utiliza muito bem de seus artifícios matemáticos, resolvendo e formulando muitos problemas. As demonstrações são em sua maioria apresentadas em texto, diferente dos livros atuais que utilizam de diversos símbolos matemáticos. Diofanto em sua obra *Arithmetica* se faz excepcional para a história não só da álgebra, na qual recebe o titulo de "Pai da álgebra", mas também para a teoria dos números.

4. Referências

- Little Heath, Sir Thomas. A History of Greek Mathematics, Volume II: From Aristarchus to Diophantus. Cap. XX ALGEBRA: DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA.
- Jacques Sesiano. Books IV to VII of Diophantus' Arithmeticain the Arabic Translation Attributed to Qustā ibn Lūqā.